

ISSN 2500—0381
Электронная версия

ISSN 0021—3454
Печатная версия

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

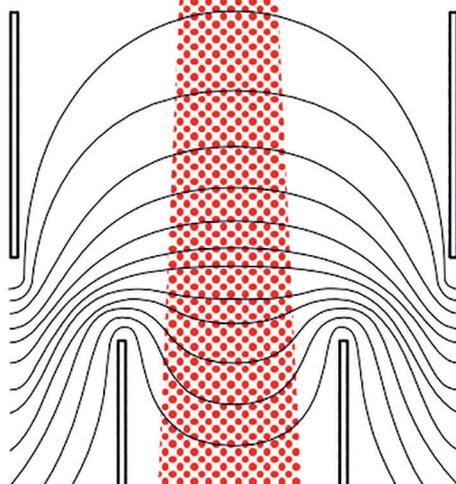
П Р И Б О Р О С Т Р О Е Н И Е

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



№ 8

Т. 67
2024



Journal of Instrument Engineering

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

*д-р техн. наук, проф. А. А. БОБЦОВ,
Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А. П. АЛЕШКИН, д-р техн. наук, проф., ВКА им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия
А. В. БЕЛИКОВ, д-р техн. наук, проф., Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
И. А. БЕССМЕРТНЫЙ, д-р техн. наук, проф., Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
В. А. БОГАТЫРЕВ, д-р техн. наук, проф., Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
Д. В. ЕФАНОВ, д-р техн. наук, проф., СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия
В. В. ЕФИМОВ, д-р техн. наук, проф., ВКА им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия
А. КЛИМЧИК, PhD, доцент, Университет Иннополис, Иннополис, Россия
С. А. КОЛЮБИН, д-р техн. наук, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
И. А. КОНЯХИН, д-р техн. наук, проф., Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
В. В. КРИШТОП, д-р физ.-мат. наук, проф., ПНИПУ, Пермь, Россия
Л. С. ЛИСИЦЫНА, д-р техн. наук, проф., Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
Ю. А. ЛИТВИНЕНКО, канд. техн. наук, Концерн «ЦНИИ «Электронприбор»», Санкт-Петербург, Россия
В. Д. ЛУКЬЯНОВ, д-р физ.-мат. наук, проф., ОАО «Авангард», Санкт-Петербург, Россия
А. В. ЛЯМИН, д-р техн. наук, доцент, СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия
А. В. МАЛОЛЕТОВ, д-р физ.-мат. наук, проф., Университет Иннополис, Иннополис, Россия
Ю. Н. МАТВЕЕВ, д-р техн. наук, ООО «ЦРТ-инновации», Санкт-Петербург, Россия
В. М. МЕДУНЕЦКИЙ, д-р техн. наук, проф., ООО «Феррум», Санкт-Петербург, Россия
А. Н. МИРОНОВ, д-р техн. наук, проф., ВКА им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия
В. М. МУСАЛИМОВ, д-р техн. наук, проф., ИПМаш РАН, Санкт-Петербург, Россия
А. А. ОЖИГАНОВ, д-р техн. наук, проф., АО «НИТИ «Авангард»», Санкт-Петербург, Россия
А. А. ПЫРКИН (зам. главного редактора), д-р техн. наук, проф., Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
В. С. СИЗИКОВ, д-р техн. наук, проф., Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
Б. В. СОКОЛОВ, д-р техн. наук, проф., СПбФИЦ РАН, Санкт-Петербург, Россия
С. В. СОЛК, д-р техн. наук, НИИ ОЭП, Сосновый Бор, Ленинградская обл., Россия
В. Ю. ТЕРТЫЧНЫЙ, д-р физ.-мат. наук, проф., Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
Д. В. ТИТОВ, д-р техн. наук, доцент, ЮЗГУ, Курск, Россия
А. В. ФЕДОРОВ, д-р техн. наук, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
Н. Б. ФИЛИМОНОВ (зам. главного редактора), д-р техн. наук, проф., МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
И. Б. ФУРТАТ, д-р техн. наук, доцент, ИПМаш РАН, Санкт-Петербург, Россия
В. П. ХОДУНКОВ, канд. техн. наук, ВНИИМ им. Д. И. Менделеева, Санкт-Петербург, Россия

Ответственный секретарь М. В. Лебецкая

Редактор Л. Г. Позднякова

Набор, верстка: Е. С. Егорова

Перевод: Ю. И. Копилевич

*Адрес: 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, лит. А, Университет ИТМО
Телефон: (812) 480-02-73, E-mail: pribor@itmo.ru
<http://pribor.ifmo.ru/>*

Подписано в печать 30.08.2024 г.

*Отпечатано в учреждении «Университетские телекоммуникации»
Адрес: 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, лит. А
Телефон: (812) 915-14-54, E-mail: Prudentov@tibir.ru*

Редколлегия просит авторов и рецензентов отнестись с пониманием к ужесточению требований к рукописям и изменению формы подачи материала в журнале

Аннотация объемом 150—250 слов должна отражать содержание статьи: предмет исследования, цель работы, метод проведения работы, краткое описание экспериментальных или теоретических исследований, полученные результаты и рекомендации по их применению.

Ключевые слова, служащие идентификаторами при предметном поиске, должны однозначно отражать содержание статьи. Основное ключевое слово/словосочетание указывается первым, общее количество ключевых слов — не менее 5.

Список литературы: для обзорной статьи рекомендуется приводить не менее 50 источников, для полнотекстовой статьи — не менее 15, для краткого сообщения — не менее 8.

Требования к оформлению рукописи размещены на сайте журнала <http://pribor.itmo.ru/>



Адрес: 197101, Санкт-Петербург,
Кронверкский пр., 49, лит. А,
Университет ИТМО
Телефон: (812) 480-02-73
[http:// pribor.ifmo.ru/](http://pribor.ifmo.ru/)
E-mail: pribor@itmo.ru

Журнал публикует научные обзоры, полнотекстовые статьи и краткие сообщения, отражающие результаты практических и теоретических исследований в области приборостроения.

Журнал содержит следующие разделы:

- информатика и информационные процессы;
- информационно-измерительные и управляющие системы;
- системный анализ, управление и обработка информации;
- приборы навигации;
- вычислительные системы и их элементы;
- оптические и оптико-электронные приборы и комплексы;
- методы и приборы для анализа и контроля материалов, изделий, веществ и природной среды;
- приборы, системы и изделия медицинского назначения;
- проектирование и технология производства приборов;
- метрология и метрологическое обеспечение;
- компьютерное моделирование и автоматизация проектирования;
- роботы, мехатроника и робототехнические системы.

По договоренности с Редакцией может быть опубликован специальный тематический выпуск, посвященный достаточно узкой проблеме приборостроения.

Рукопись подается по электронной почте: pribor@itmo.ru. Редакция принимает рукопись к рецензированию при условии получения полного комплекта документов, включающего:

- экспертное заключение о возможности опубликования в открытой печати (формат PDF);
- файлы рукописи статьи, оформленные в соответствии с требованиями журнала;
- сведения об авторах, заполненные по шаблону (на русском и английском языке);
- договор о передаче авторских прав.

Рукопись должна содержать:

- название статьи (на русском и английском языке), индекс УДК;
- аннотацию (150—250 слов, на русском и английском языке), ключевые слова (не менее 5 и не более 25, на русском и английском языке), основной текст, список литературы;
- рисунки: каждый на отдельном листе формата А4 (не заверстывать в текст), таблицы.

Объем текста (оформленного в соответствии с требованиями журнала — шрифт Times New Roman, размер — 14 пт, междустрочный интервал 1,5, поля — сверху и слева 25 мм, снизу 20 мм, справа 10 мм) должен составлять 10—20 страниц, краткого сообщения — 3—5. Объем обзора предварительно согласовывается с Редакцией.

Список литературы (рекомендуется): для обзорной статьи — не менее 50, для полнотекстовой статьи — не менее 15, для краткого сообщения — не менее 8 литературных источников (не менее половины из них должны представлять собой ссылки на издания, включенные в международные базы цитирования Scopus и Web of Science). Список литературы должен формироваться в порядке появления ссылок в тексте.

Не допускается выравнивание с помощью пробелов, табуляций и символов конца абзаца. Эти символы при необходимости могут вставляться не более одного раза подряд (**не переносить с помощью дефисов**).

Формулы и отдельные символы набираются с использованием только редактора формул MathType.

Не вставлять формулы из пакетов MathCad и MatLab. Размер шрифта в формулах — по умолчанию. Все переменные набираются курсивом, греческие буквы — прямым шрифтом, полужирные символы в формуле — стилем „матрица вектор“, русские символы — стилем „текст“, векторы следует набирать полужирным шрифтом без стрелок.

Рисунки выполняются в градациях серого в одном из форматов приложений Microsoft (Word, Excel, PowerPoint), предпочтителен векторный формат. Кривые на графиках следует помечать цифрами (1, 2, 3 и т. д.) или/и задавать линиями разного стиля (пунктир, штрихпунктир, жирная); толщина осей должна быть не менее 0,5 пт, иначе качество печати не гарантируется.

Плата за публикацию не взимается.

СОДЕРЖАНИЕ

ИНФОРМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

- Стародубцев В. Г., Морозов Я. Г. Множества пятеричных касами-подобных последовательностей для систем передачи цифровой информации 637
- Фунг В. К., Богатырев В. А. Экспериментальное исследование производительности кластера с контейнерной виртуализацией 647

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИ

- Земсков А. В. Аналитический подход к исследованию неоднородных марковских цепей с кусочно-постоянными изменениями переходных вероятностей 657
- Овчаров А. О., Ведяков А. А. Метод оценивания параметров линейных регрессионных моделей с линейно зависимыми элементами 670

ПРИБОРЫ НАВИГАЦИИ

- Алешкин В. В., Здражевский Р. А., Ефремов Ю. М., Скибин С. А. Применение позиционной коррекции с перекрестными связями в бесплатформенной системе ориентации 678

ОПТИЧЕСКИЕ И ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫЕ ПРИБОРЫ И КОМПЛЕКСЫ

- Зеневич А. О., Новиков Е. В., Матковская Т. А., Шваков А. В. Определение длины волны излучения в оптическом волокне 689
- Москалев Д. Н., Вобликов Е. Д., Криштоп В. В., Максименко В. А., Волынцев А. Б. Использование теории связанных мод при моделировании межмодовой связи в изогнутых волноводах на основе тонкопленочного ниобата лития 697
- Мусихин И. Д., Капустин В. В., Мовчан А., Забуга С. А., Познахарев Е. С. Методы компенсации влияния различий в отражательной способности объектов для повышения точности построения карт глубин активно-импульсной телевизионной измерительной системой 713

МЕТОДЫ И ПРИБОРЫ ДЛЯ АНАЛИЗА И КОНТРОЛЯ МАТЕРИАЛОВ, ИЗДЕЛИЙ, ВЕЩЕСТВ И ПРИРОДНОЙ СРЕДЫ

- Майоров Е. Е., Костин Г. А., Курлов В. В., Баранов Н. Е. Исследование динамической поверхности летательного аппарата интерференционным методом 722

EDITOR-IN-CHIEF

*Dr. Sci., Prof. ALEXEY BOBTSOV,
ITMO University, St. Petersburg, Russia*

EDITORIAL BOARD

ALESHKIN ANDREY, Dr. Sci., Prof., A. F. Mozhaisky Military Space Academy, St. Petersburg, Russia
BELIKOV ANDREY, Dr. Sci., Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
BESSMERTNY IGOR, Dr. Sci., Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
BOGATYREV VLADIMIR, Dr. Sci., Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
EFANOV DMITRY, Dr. Sci., Prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia
EFIMOV VLADIMIR, Dr. Sci., Prof., A. F. Mozhaisky Military Space Academy, St. Petersburg, Russia
KHODUNKOV VYACHESLAV, PhD, D. I. Mendeleev All-Russian Institute for Metrology, St. Petersburg, Russia
KLIMCHIK ALEXANDER, PhD, Ass. Prof., Innopolis University, Innopolis, Russia
KOLYUBIN SERGEY, Dr. Sci., Ass. Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
KONYAKHIN IGOR, Dr. Sci., Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
KRISHTOP VIKTOR, Dr. Sci., Prof., PNRPU, Perm, Russia
LISITSYNA LYUBOV, Dr. Sci., Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
LITVINENKO YULIA, PhD, Concern CSRI Electropribor, JSC, St. Petersburg, Russia
LUKYANOV VALERY, Dr. Sci., Prof., Avangard JSC, St. Petersburg, Russia
LYAMIN ANDREY, Dr. Sci., Ass. Prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia
MALOLETOV ALEXANDER, Dr. Sci., Prof., Innopolis University, Innopolis, Russia
MATVEEV YURIY, Dr. Sci., Speech Technology Center, St. Petersburg, Russia
MEDUNETSKY VIKTOR., Dr. Sci., Prof., Ferrum LLC, St. Petersburg, Russia
MIRONOV ANDREY, Dr. Sci., Prof., A. F. Mozhaisky Military Space Academy, St. Petersburg, Russia
MUSALIMOV VIKTOR, Dr. Sci., Prof., IPMash RAS, St. Petersburg, Russia
OZHIGANOV ALEXANDER, Dr. Sci., Prof., SRTI Avangard JSC, St. Petersburg, Russia
PYRKIN ANTON, Dr. Sci., Prof., Deputy Editor-in-Chief, ITMO University, St. Petersburg, Russia
SIZIKOV VALERY, Dr. Sci., Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
SOKOLOV BORIS, Dr. Sci., Prof., SPbFRC RAS, St. Petersburg, Russia
SOLK SERGEY, Dr. Sci., SRI OEP, Sosnovy Bor, Leningrad region, Russia
TERTYCHNY VLADIMIR, Dr. Sci., Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
TITOV DMITRY, Dr. Sci., Ass. Prof., SWSU, Kursk, Russia
FEDOROV ALEXEY, Dr. Sci., Ass. Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
FILIMONOV NIKOLAY, Dr. Sci., Prof., Deputy Editor-in-Chief, M. V. Lomonosov MSU, Moscow, Russia
FURTAT IGOR, Dr. Sci., Ass. Prof., IPMash RAS, St. Petersburg, Russia

Executive secretary Marina V. Lebedskaya

Editor Lidia G. Pozdniakova

Page-proof, makeup Ekaterina S. Egorova

Translation of Yuriy I. Kopilevich

Address: ITMO University, Kronverksky pr. 49, bldg. A, St. Petersburg, Russia, 197101
Tel: (812) 480-02-73
Site: pribor.ifmo.ru
E-mail: pribor@itmo.ru

JOURNAL OF INSTRUMENT ENGINEERING

ITMO UNIVERSITY

The Journal is published since January 1958

Vol. 67

AUGUST 2024

№ 8

CONTENTS

INFORMATICS AND INFORMATION PROCESSES

- Starodubtsev V. G., Morozov Y. G.** Sets of Quinary Kasami-like Sequences for Digital Information Transmission Systems 637
- Phung Van Quy, Bogatyrev V. A.** Experimental Study of Cluster Performance with Container Virtualization 647

SYSTEM ANALYSIS, CONTROL, AND INFORMATION PROCESSING

- Zemskov A. V.** Analytical Approach to the Study of Heterogeneous Markov Chains with Piecewise Constant Changes in Transition Probabilities. 657
- Ovcharov A. O., Vedyakov A. A.** Method of Estimation of Parameters of Linear Regression Model with Linearly Dependent Elements 670

NAVIGATIONAL INSTRUMENTS

- Aleshkin V. V., Zdrashevsky R. A., Efremov Yu. M., Skibin S. A.** Application of Cross-linked Positional Correction in a Strapdown Orientation System. 678

OPTICAL AND OPTO-ELECTRONIC INSTRUMENTS AND SYSTEMS

- Zenevich A. O., Novikov E. V., Matkovskaia T. A., Shvakov A. V.** Determining the Wavelength of Radiation in an Optical Fiber 689
- Moskalev D. N., Voblikov E. D., Krishtop V. V., Maksimenko V. A., Volyntsev A. B.** Using Coupled Mode Theory to Model Intermode Couplings in Curved Waveguides Based on Thin-film Lithium Niobate 697
- Musikhin I. D., Kapustin V. V., Movchan A., Zabuga S. A., Poznakharev E. S.** Methods of Compensating for the Influence of Differences in the Reflectivity of Objects to Improve the Accuracy of Constructing Depth Maps Using an Active-pulse Television Measuring System 713

METHODS AND INSTRUMENTS FOR ANALYSIS AND MONITORING OF THE NATURAL ENVIRONMENT, SUBSTANCES, MATERIALS AND PRODUCTS

- Maiorov E. E., Kostin G. A., Kurlov V. V., Baranov N. E.** Study of the Dynamic Surface of an Aircraft by the Interference Method 722

To the Authors!

The Journal of Instrument Engineering publishes scientific reviews, full-text articles and short messages, reflecting the unpublished results of theoretical and practical research in the field of fundamental instrument making.

The Journal publishes articles on the following themes: information technologies and systems, devices and automatic control systems, computer engineering, gyroscopic and navigation systems, instruments of precision mechanics, electronic and electromagnetic devices, optical and optoelectronic devices and systems, thermal regimes and reliability of devices and systems, technology and instrumentation, scientific and practical development. In agreement with the Editorial Board can be published a special themed issue devoted to a fairly narrow issue of instrumentation.

The material of the article accepted in electronic form and on any media, executed in a text editor Word without formatting along with a hard copy on A4. Electronic version of the paper may be sent by E-mail: **pribor@mail.ifmo.ru**

The size of the article (in printed form) must not exceed eight pages, a short presentation of two. Size scientific review previously agreed with the Editorial Board.

Submission includes two copies of:

— the manuscript text; list of references (recommended): review article — not less than 50, for the full text of the article — no less than 15, for short messages — at least 8 of the literary source (at least half of them should be links to the editions listed in international database of citation Scopus and Web of Science); number citations consecutively as they appear in the text;

— extended abstract (150—250 words);

— keywords (not less than 5 and not more than 25);

— illustrations: each on a separate sheet of A4 (not overestimate in the text) — big, with a maximum fill;

— the recommendation of the Department (laboratory);

— information about the authors on a template (surname, name, patronymic, name of the organization in accordance with the latest edition of the Charter, the address of the organization, academic degree and title, position, e-mail address).

The article must also enclose agreement on the transfer of copyright.

The main text. The following requirements are common to good practice in the design documents.

Font — Times New Roman, size 14, line spacing 1.5, margins — top and left — 25 mm, bottom — 20 mm, right — 10 mm.

Not allowed alignment with spaces, tabs and end of a paragraph (in the layout will need to be cleared). These symbols must be inserted only when necessary, and not more than once in a row (not to carry with dashes).

Don't insert formulas from MathCad or MatLab!

Figures and tables are to be inserted after the list of references. Graphics are accepted in one of Microsoft formats (Word, Excel, and PowerPoint); vector format is preferable. Don't use color graphics; it is better to apply dotted, dash-and dot lines, etc., or mark lines with numerical symbols.

Editorial Staff

**МНОЖЕСТВА ПЯТЕРИЧНЫХ КАСАМИ-ПОДОБНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ
ДЛЯ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ ЦИФРОВОЙ ИНФОРМАЦИИ****В. Г. Стародубцев, Я. Г. Морозов***Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского, 197198, Санкт-Петербург, Россия
vka@mil.ru*

Аннотация. Для пятеричных базисных M -последовательностей с периодом $N = 5^S - 1$ ($S = 4, 6$) представлены наборы векторов индексов децимации $\mathbf{I}_{S,МК} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, на основании которых в конечных полях $GF(5^S)$ формируются малые множества касами-подобных последовательностей (КПП) с периодом $N < 20\,000$. Показано, что для значений $S = 4, 6$ периодическая взаимно корреляционная функция (ПВКФ) малого множества КПП является четырехуровневой с максимальным значением модуля ПВКФ $|R_{\max}|_{S,МК} = (5^{S/2} + 1)$. Приведены значения объемов малых множеств пятеричных КПП.

Ключевые слова: конечное поле, корреляционная функция, M -последовательность, последовательность Касами, индекс децимации

Ссылка для цитирования: Стародубцев В. Г., Морозов Я. Г. Множества пятеричных КАСАМИ-подобных последовательностей для систем передачи цифровой информации // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 8. С. 637–646. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-8-637-646.

SETS OF QUINARY KASAMI-LIKE SEQUENCES FOR DIGITAL INFORMATION TRANSMISSION SYSTEMS**V. G. Starodubtsev, Y. G. Morozov***A. F. Mozhaisky Military Space Academy, St. Petersburg, Russia
vka@mil.ru*

Abstract. For quinary basic M -sequences (MS) with the period $N = 5^S - 1$ ($S = 4, 6$), sets of vectors of decimation indices $\mathbf{I}_{S,МК} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ are presented, on the basis of which small sets of Kasami-like sequences (KLS) with the period $N < 20\,000$ are formed in the finite fields $GF(5^S)$. It is shown that for values of $S = 4, 6$ the periodic cross-correlation function (PCCF) of a small set of KLS is four-level with a maximum value of the PCCF $|R_{\max}|_{S,МК} = (5^{S/2} + 1)$. The values of the volumes of small sets of quinary KLS are given.

Keywords: finite fields, correlation function, M -sequences, Kasami sequences, decimation indices

For citation: Starodubtsev V. G., Morozov Y. G. Sets of quinary Kasami-like sequences for digital information transmission systems. *Journal of Instrument Engineering*. 2024. Vol. 67, N 8. P. 637–646 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-8-637-646.

Одной из тенденций развития систем передачи цифровой информации (СПЦИ), включающих, в частности, системы связи по спутниковым и космическим радиоканалам, является применение систем сигналов с расширенным спектром (СРС). В некоторых источниках для данных сигналов используется термин „сигналы сложной формы“ (ССФ). Это можно объяснить тем, что расширение спектра сигналов обеспечивается дополнительной модуляцией информационной последовательности с помощью псевдослучайных последовательностей (ПСП), обладающих

хорошими авто- и взаимно корреляционными свойствами. При этом на длине информационного символа может укладываться от одного до нескольких периодов ПСП [1–4].

Расширение спектра сигналов позволяет повысить помехозащищенность СПЦИ по отношению как к мощным узкополосным, так и широкополосным преднамеренным помехам. Кроме того, применение СРС, формируемых на основе таких множеств ПСП, как множества последовательностей Голда, малые и большие множества Касами, множества предпочтительных пар М-последовательностей (МП), обеспечивает возможность организации кодового много-станционного доступа к ретранслятору в системах спутниковой связи. В современных СПЦИ в основном применяются двоичные сигналы, что определяет использование фазовой модуляции на 180° (ФМ-2), относительной фазовой модуляции (ОФМ), частотной модуляции, а также комбинированных видов модуляции [5–7].

Переход к многопозиционным и многофазным сигналам, формируемым на основе недвоичных последовательностей, позволяет повысить эффективность использования частотного спектра, на который накладываются ограничения в системах связи с применением радиоканалов, например, в системах мобильной и спутниковой связи [2, 4, 5]. Также многопозиционные сигналы обеспечивают более высокую структурную скрытность при передаче информации [8–10].

К недвоичным последовательностям, а также к множествам ПСП, с помощью которых формируются многофазные СРС, предъявляются жесткие требования как по корреляционным, так и по структурным свойствам. Основная задача при синтезе множеств ПСП заключается в разработке таких алгоритмов и методов формирования множеств, которые бы обеспечивали низкий уровень периодической взаимно корреляционной функции (ПВКФ) последовательностей при фиксированном объеме формируемых множеств.

Эти вопросы нашли отражение в большом количестве научных работ как в нашей стране, так и за рубежом [11–17]. Сравнительный анализ алгоритмов формирования недвоичных последовательностей с заданными корреляционными и структурными свойствами проведен в [11–13]. Вопросам повышения структурной скрытности недвоичных последовательностей и методам формирования множеств таких последовательностей уделено большое внимание в статьях [14, 15]. В работах [16, 17] рассмотрены алгоритмы формирования новых семейств недвоичных ПСП, проведен анализ корреляционных свойств, определены индексы децимации, обеспечивающие возможность синтеза троичных последовательностей с идеальной автокорреляционной функцией. В [18] получены индексы децимации для формирования множеств троичных касами-подобных последовательностей, обосновано применение данного термина при проведении исследований, касающихся вопросов формирования множеств недвоичных последовательностей.

Цель настоящей статьи заключается в нахождении в конечных полях $GF(5^S)$ со степенью расширения $S = 4, 6$ векторов индексов децимации $I_S = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ для формирования малых множеств пятеричных КПП с низким уровнем взаимной корреляции.

Корреляционные свойства СРС полностью определяются корреляционными свойствами пятеричных ПСП, на основании которых проводилось расширение спектра сигнала [1, 3, 5]:

$$A = \{a_i\} = \{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\}, \quad (1)$$

где $N = 5^S - 1$ — период последовательности, $a_i = \exp(j2\pi i/5)$; ($i = 0, 1, \dots, 4$) — элементы комплекснозначного алфавита (корни 5-й степени из единицы).

На рис. 1 представлены элементы комплекснозначного алфавита для значений $p = 2$ (а) и $p = 3$ (б). При формировании и анализе ПСП элементы a_i представляются как элементы, принадлежащие простому полю Галуа $GF(p)$, т. е. $a_i = 0, 1, \dots, p - 1$.

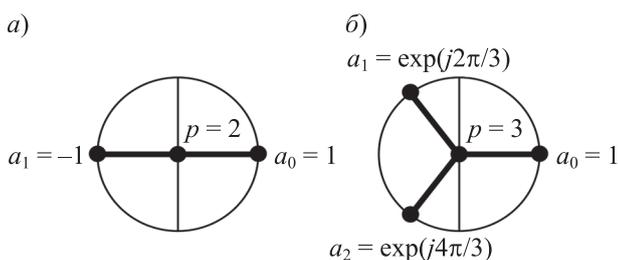


Рис. 1

Если элемент a_i принадлежит комплекснозначному алфавиту, то используется метрика в евклидовом пространстве. При этом для ПВКФ последовательностей A_j и A_k с периодом N справедливо выражение [5, 7, 10]:

$$R_{jk}(\tau) = \sum_{i=0}^{N-1} a_{ji} a_{k,i+\tau}^* \quad (2)$$

где „*“ — знак комплексного сопряжения; τ — циклический сдвиг.

Если элемент a_i рассматривается как элемент простого поля $GF(p)$, то вычисления проводятся в метрике Хемминга при $p = 2$ или в метрике Ли при $p > 2$ [3, 10]. Для определения корреляционной функции сначала находится расстояние между последовательностями A_j и A_k :

$$D_{jk}(\tau) = \sum_{i=0}^{N-1} d(a_{ji}, a_{k,i+\tau}), \quad (3)$$

где $d(a_{ji}, a_{k,i+\tau})$ — расстояние между символами последовательностей в метриках Хемминга или Ли.

Тогда ПВКФ последовательностей определяется выражением [10]:

$$R_{jk}(\tau) = N - \frac{4}{p} D_{jk}(\tau). \quad (4)$$

По аналогии с двоичным случаем формирование последовательностей малых множеств пятеричных КПП осуществляется следующим образом. Определяются символы c_i ($i = 0, \dots, N-1$) базисной МП в соответствии с выражением [3, 5, 6]:

$$c_i = \text{tr}_{S1} \alpha^i, \quad i = 0, 1, \dots, 5^S - 2, \quad (5)$$

где $\text{tr}_{S1}(\alpha^i)$ — функция следа, т. е. отображение элемента α^i , принадлежащего расширенному полю $GF(5^S)$, в простое поле $GF(5)$.

Производится децимация символов базисной МП по индексам d_j , которые определяются с учетом выполнения условия НОД $(5^S - 1; 5^{S/2} - 1) = 5^{S/2} - 1$, где НОД (a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b . Полученная МП с периодом $N_1 = 5^{S/2} - 1$ складывается с базисной МП, в результате чего образуются символы b_i последовательности малого множества КПП.

Процедура формирования последовательностей малого множества КПП с периодом $N = 5^S - 1$ может быть реализована как программным, так и аппаратным способом.

При программном способе формирования для получения символов b_i необходимо сложить по $\text{mod } 5$ символы c_i вида (5) и символы $c_{i \times d_j \text{ mod } (5^S - 1)}$, полученные в результате децимации МП по индексу d_j

$$b_i = c_i \times c_{i \times d_j \text{ mod } (5^S - 1)} \text{ mod } 5; \quad i = 0, 1, 2, \dots, 5^S - 2. \quad (6)$$

Таким образом, для формирования малого множества КПП требуется только знание символов базисной МП и индекса децимации d_j .

Аппаратная реализация процедуры формирования основана на использовании двух регистров сдвига, охваченных цепью обратной связи. Первый регистр строится на основе проверочного полинома $h_1(x)$ степени S , а второй регистр — на основе проверочного полинома $h_{d_j}(x)$ степени $S/2$. Умножители и сумматоры по $\text{mod } 5$ в цепи обратной связи регистров сдвига определяются коэффициентами проверочных полиномов. В этом случае для формирования малого множества КПП требуется знание структуры двух проверочных полиномов $h_1(x)$ и $h_{d_j}(x)$, произведение которых соответствует проверочному полиному малого множества КПП $h_{МК}(x) = h_1(x) h_{d_j}(x)$. Индексы в обозначениях проверочных полиномов $h_i(x)$, используемые в статье, соответствуют показателям степени корней этих полиномов.

Граничные оценки для модуля максимального значения ПВКФ $|R_{\max}|_{S,МК}$ и коэффициента корреляции $|r_{\max}|_{S,МК} = |R_{\max}|_{S,МК}/N$, а также объема малого множества КПП определяются выражениями [5, 6]:

$$|R_{\max}|_{S,МК} = 5^{S/2} + 1, |r_{\max}|_{S,МК} = (5^{S/2} - 1)^{-1}, \tag{7}$$

$$V_{S,МК} = 5^{S/2}. \tag{8}$$

Рассмотрим процедуру формирования малого множества КПП в конечном поле $GF(5^S) = GF(5^4)$ с примитивным полиномом $f(x) = h_1(x) = x^4 + x^2 + 2x + 2$.

В поле $GF(5^4)$ минимальный полином для примитивного элемента $\alpha = a$ в общем виде определяется выражением

$$h_1(x) = x^4 - x^3 \sum_{i=0}^3 \alpha^{5^i} + x^2 \sum_{i=0}^3 \sum_{\substack{j=0 \\ i < j}}^3 \alpha^{5^i} \alpha^{5^j} + x \sum_{i=0}^3 \sum_{\substack{j=0 \\ i < j < k}}^3 \alpha^{5^i} \alpha^{5^j} \alpha^{5^k} + \alpha^{5^0} \alpha^{5^1} \alpha^{5^2} \alpha^{5^3}. \tag{9}$$

После выполнения операций суммирования и группирования слагаемых в соответствии с функцией следа $\text{tr}_{S1}(\alpha^i)$ получим

$$h_1(x) = x^4 - \text{tr}_{41}(\alpha)x^3 + [\text{tr}_{41}(\alpha^6) + \text{tr}_{21}(\alpha^{26})]x^2 - \text{tr}_{41}(\alpha^{31})x + \alpha^{156}. \tag{10}$$

Коэффициенты полинома $h_1(x)$, представленного в общем виде

$$h_1(x) = x^S + h_{S-1}x^{S-1} + \dots + h_1x + h_0 = x^4 + h_3x^3 + h_2x^2 + h_1x + h_0, \tag{11}$$

в соответствии с (10) определяются выражениями

$$h_3 = -\text{tr}_{41}(\alpha); h_2 = \text{tr}_{41}(\alpha^6) + \text{tr}_{21}(\alpha^{26}); h_1 = -\text{tr}_{41}(\alpha^{31}); h_0 = \alpha^{156}. \tag{12}$$

В поле $GF(5^4)$ существует 48 примитивных полиномов с индексами децимации $d_j = 1, 7, 11, \dots, 373, 469, 499$. Значения коэффициентов для восемнадцати полиномов приведены в табл. 1 [19].

В подполе $GF(5^2)$ минимальные полиномы определяются выражением

$$h_i(x) = (x - \alpha^{26i})(x - \alpha^{130i}) = x^2 - \text{tr}(\alpha^{26i})x + \alpha^{130i}, \tag{13}$$

где $i = 1, 2, \dots, 23$; операции умножения в показателях степени выполняются по mod 624.

Существует десять минимальных полиномов степени 2 с периодами $N = 24, 12, 8, 6, 3$, которые приведены в табл. 2.

Для формирования малого множества КПП могут быть использованы четыре полинома с периодом корней $N = 24$: $h_{26}(x) = x^2 + x + 2$; $h_{182}(x) = x^2 + 2x + 3$; $h_{338}(x) = x^2 + 4x + 2$ и $h_{494}(x) = x^2 + 3x + 3$.

Таблица 1. Примитивные полиномы в поле $GF(5^4)$, $f(x) = h_1(x) = x^4 + x^2 + 2x + 2$

d_j	$h_j(x)$										
1	10122	17	11212	29	13302	239	11113	323	10133	373	120022
7	11013	19	13023	31	12203	313	10132	343	13203	469	10442
11	10123	23	13043	37	11202	319	14043	349	14202	499	11303

Таблица 2. Минимальные полиномы в подполе $GF(5^2)$, $f(x) = h_{26}(x) = x^2 + 2x + 2$

d_j	$h_j(x)$	N												
26	112	24	78	103	8	182	123	24	234	102	8	364	124	12
52	134	12	104	141	6	208	111	3	338	142	24	494	133	24

Анализ корреляционных свойств последовательностей, образованных с помощью проверочных полиномов $h_{МК}(x) = h_1(x) \cdot h_{dj}(x)$ для $d_j = 26, 338$, в соответствии с (2)–(4) показал, что ПВКФ данных последовательностей удовлетворяет граничной оценке (7) и принимает следующие четыре значения:

$$R_{S,МК}(\tau) = R_{4,МК}(\tau) = [-26; -8,725; -1; 19,225]. \quad (14)$$

Проверочные полиномы малых множеств КПП с периодом $N = 5^4 - 1 = 624$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} h_{МК1}(x) &= h_1(x) \cdot h_{26}(x) = (x^4 + x^2 + 2x + 2)(x^2 + x + 2), \\ h_{МК2}(x) &= h_1(x) \cdot h_{338}(x) = (x^4 + x^2 + 2x + 2)(x^2 + 4x + 2). \end{aligned} \quad (15)$$

Объем малых множеств КПП соответствует (8) и равен

$$V_{4,МК} = 5^{S/2} = 5^2 = 25. \quad (16)$$

Вектор индексов децимации при формировании малых множеств пятеричных КПП с периодом $N = 624$ имеет вид

$$\mathbf{I}_{S,МК} = \mathbf{I}_{4,МК} = (26, 338). \quad (17)$$

Общее число малых множеств пятеричных КПП с периодом $N = 624$ определяется числом примитивных полиномов в поле $GF(5^4)$: $M_{S,МК} = M_{4,МК} = 96$. Корреляционные и структурные свойства характеризуются максимальными значениями $|R_{\max}|_{4,МК} = 26$, $|r_{\max}|_{4,МК} = 0,042$ и объемом $V_{4,МК} = 5^{4/2} = 25$.

Для каждого из 48 примитивных полиномов поля $GF(5^4)$ можно сформировать малое множество КПП. С этой целью необходимо индексы множителей в выражении для $h_{МК}(x)$ умножить на индекс данного полинома. Например, для полинома $h_{31}(x)$ проверочные полиномы малого множества КПП равны $h_{МК3}(x) = h_{31}(x)h_{182}(x) = (x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 3)(x^2 + 2x + 3)$, $h_{МК4}(x) = h_{31}(x)h_{494}(x)$. На рис. 2 приведен график сегмента длиной 126 символов ПВКФ малого множества КПП с полиномом $h_{МК3}(x) = h_{31}(x)h_{182}(x)$.

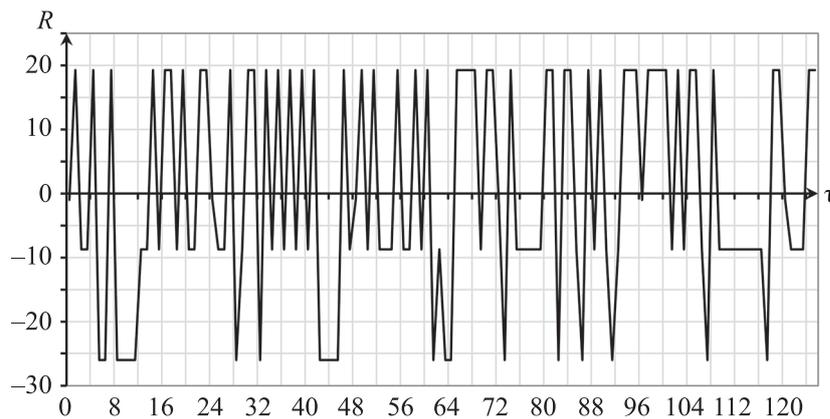


Рис. 2

Проверочный полином для синтеза пятеричных последовательностей большого множества КПП с периодом $N = 5^S - 1$ (S — четное) является произведением трех полиномов, два из которых степени S , а третий — степени $S/2$.

Проведенный анализ корреляционных свойств данных последовательностей как при $S = 4$, так и при $S = 6$ показал, что ПВКФ последовательностей полученных множеств не обладает ограниченным числом уровней и не удовлетворяет граничным оценкам для $|R_{\max}|_{S,БК}$ [7, 18].

Таким образом, формирование больших множеств пятеричных КПП с периодами $N = 624, 15\ 624$ не представляется возможным.

Рассмотрим процедуру формирования малого множества КПП в конечном поле $GF(5^5) = GF(5^6)$ с примитивным полиномом $f(x) = h_1(x) = x^6 + x^2 + 2x + 2$.

В поле $GF(5^6)$ минимальный полином для примитивного элемента α в общем виде определяется выражением

$$\begin{aligned}
 h_1(x) = & x^6 - x^5 \sum_{i=0}^5 \alpha^{5^i} + x^4 \sum_{i=0}^5 \sum_{\substack{j=0 \\ i < j}}^5 \alpha^{5^i} \alpha^{5^j} - x^3 \sum_{i=0}^5 \sum_{\substack{j=0 \\ i < j < k}}^5 \sum_{k=0}^5 \alpha^{5^i} \alpha^{5^j} \alpha^{5^k} + x^2 \sum_{i=0}^5 \sum_{\substack{j=0 \\ i < j < \dots < l < m}}^5 \sum_{l=0}^5 \sum_{m=0}^5 \alpha^{5^i} \alpha^{5^j} \alpha^{5^l} \alpha^{5^m} - \\
 & - x \sum_{i=0}^5 \sum_{\substack{j=0 \\ i < j < \dots < l < m < n}}^5 \sum_{l=0}^5 \sum_{m=0}^5 \sum_{n=0}^5 \alpha^{5^i} \alpha^{5^j} \alpha^{5^l} \alpha^{5^m} \alpha^{5^n} + \alpha^{5^0} \alpha^{5^1} \alpha^{5^2} \alpha^{5^3} \alpha^{5^4} \alpha^{5^5}.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

После выполнения операций суммирования с учетом выражений для функций следа минимальный полином (18) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 h_1(x) = & x^6 - x^5 \text{tr}_{61}(\alpha) + x^4 [\text{tr}_{61}(\alpha^6) + \text{tr}_{61}(\alpha^{26}) + \text{tr}_{31}(\alpha^{126})] - \\
 & - x^3 [\text{tr}_{61}(\alpha^{31}) + \text{tr}_{61}(\alpha^{131}) + \text{tr}_{61}(\alpha^{151}) + \text{tr}_{21}(\alpha^{651})] + \\
 & + x^2 [\text{tr}_{61}(\alpha^{156}) + \text{tr}_{61}(\alpha^{656}) + \text{tr}_{31}(\alpha^{756})] - x \text{tr}_{61}(\alpha^{781}) + \alpha^{3906}.
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Коэффициенты h_i минимального полинома (19) представляют собой сумму функций следа как из основного поля $GF(5^6)$, так и из его подполей $GF(5^3)$ и $GF(5^2)$ в простом поле $GF(5)$.

Отметим, что значения данных коэффициентов можно вычислить путем сложения по mod 5 символов ПСП, получаемых в результате децимации символов базисной МП, представленной в каноническом виде, по индексам децимации, равным показателям степени элемента α в выражениях для функций следа $\text{tr}(\alpha^i)$.

В поле $GF(5^6)$ имеется 720 примитивных полиномов, двенадцать из которых приведены в табл. 3 [19].

В подполе $GF(5^3)$ минимальные полиномы степени 3 определяются выражением

$$h_i(x) = (x - \alpha^{126i})(x - \alpha^{630i})(x - \alpha^{3150i}) = x^3 - \text{tr}(\alpha^{126i})x^2 + \text{tr}(\alpha^{756i})x - \alpha^{3906i},
 \tag{20}$$

где $i = 1, 2, \dots, 123$; операции умножения в показателях степени выполняются по mod 15624.

Существует 20 минимальных полиномов степени 3 с периодом $N = 124$, которые приведены в табл. 4.

Таблица 3. Примитивные полиномы в поле $GF(5^6)$, $f(x) = h_1(x) = x^6 + x^2 + 2x + 2$

d_j	$h_j(x)$										
1	1000122	13	1143012	19	1010343	9343	1440203	11719	1000113	11869	1223202
11	1113023	17	1241342	23	1314323	9349	1012422	11849	1043132	12499	1130003

Таблица 4. Минимальные полиномы в подполе $GF(5^3)$, $f(x) = h_{126}(x) = x^3 + x^2 + 4x + 3$

d_j	$h_j(x)$								
126	1143	1386	1312	2646	1033	4914	1222	7938	1442
378	1302	1638	1203	2898	1412	5418	1032	8694	1343
882	1242	2142	1113	4158	1403	5922	1042	9198	1213
1134	1323	2394	1102	4662	1223	6174	1043	12474	1322

Проведенный в соответствии с (2)–(4) анализ корреляционных свойств последовательностей, образованных с помощью проверочных полиномов $h_{МК}(x) = h_1(x) \cdot h_{d_j}(x)$, для значений d_j из табл. 4 показал, что только для двух полиномов возможно формирование малых множеств КПП.

Малые множества КПП с периодом $N = 15\ 624$ формируются на основе проверочных полиномов вида

$$\begin{aligned} h_{МК5}(x) &= h_1(x) \cdot h_{126}(x) = (x^6 + x^2 + 2x + 2)(x^3 + x^2 + 4x + 3); \\ h_{МК6}(x) &= h_1(x) \cdot h_{7938}(x) = (x^6 + x^2 + 2x + 2)(x^3 + 4x^2 + 4x + 2). \end{aligned} \quad (21)$$

Взаимно корреляционная функция последовательностей данного множества является четырехуровневой, удовлетворяет граничной оценке (7) и принимает следующие значения:

$$R_{S,МК}(\tau) = R_{6,МК}(\tau) = [-126; -39,627; -1; 100,127]. \quad (22)$$

Объем малого множества КПП соответствует (8) и равен

$$V_{6,МК} = 5^{S/2} = 5^3 = 125. \quad (23)$$

Вектор индексов децимации при формировании малых множеств пятеричных КПП с периодом $N = 15\ 624$ имеет вид

$$\mathbf{I}_{S,МК} = \mathbf{I}_{6,МК} = (126, 7938). \quad (24)$$

Общее число малых множеств пятеричных КПП с периодом $N = 15\ 624$ равно $M_{S,МК} = M_{6,МК} = 1440$, максимальное значение модуля ПВКФ $|R_{\max}|_{6,МК} = 126$, объем множеств равен $V_{6,МК} = 5^{6/2} = 125$.

Проверочные полиномы малых множеств КПП с периодом $N = 15\ 624$ для произвольного примитивного полинома вычисляются путем умножения индексов множителей полиномов $h_{МК5}(x)$ или $h_{МК6}(x)$ из (21) на индекс произвольного примитивного полинома по $\text{mod } N$. Например, для примитивного полинома $h_{9343}(x)$ проверочные полиномы малого множества КПП равны $h_{МК7}(x) = h_{9343}(x)h_{5418}(x) = (x^6 + 4x^5 + 4x^4 + 2x^2 + 3)(x^3 + 3x + 2)$, $h_{МК8}(x) = h_{9343}(x)h_{13230}(x)$. На рис. 3 приведен график сегмента длиной 126 символов ПВКФ малого множества КПП с полиномом $h_{МК7}(x) = h_{9343}(x)h_{5418}(x)$.

Программный способ формирования пятеричных последовательностей малого множества КПП с периодом $N = 15\ 624$ реализуется в соответствии с (6).

Реализация аппаратного способа формирования аналогична случаю $N = 624$. На рис. 4 показана схема устройства формирования малого множества КПП с проверочным полиномом $h_{МК6}(x) = h_1(x) \cdot h_{7938}(x)$.

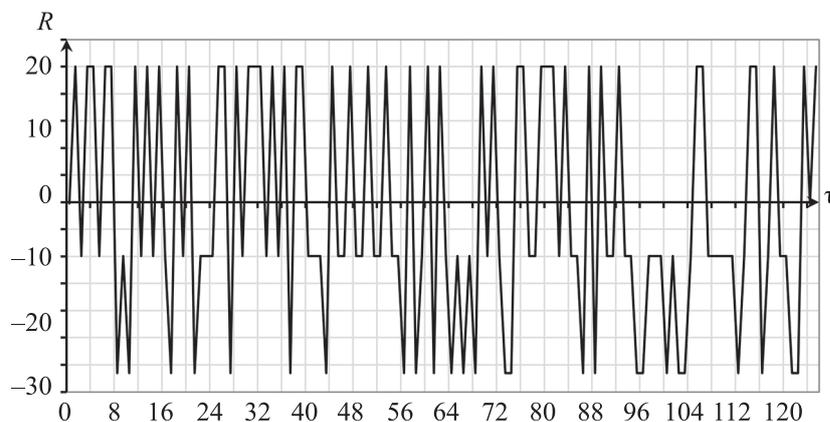


Рис. 3

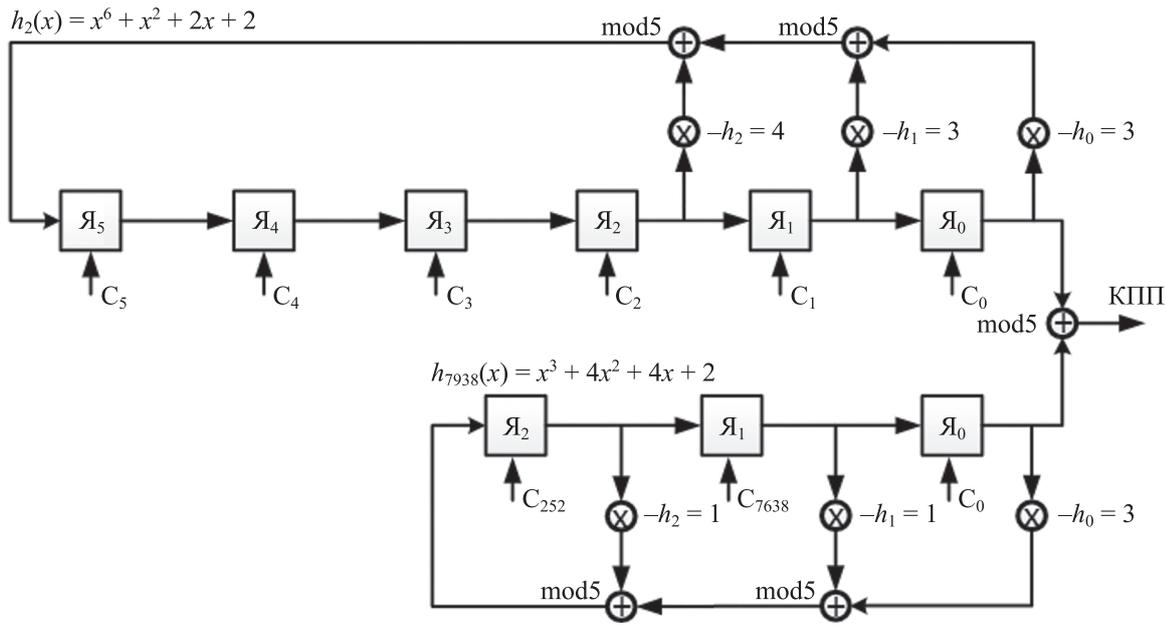


Рис. 4

Умножители и сумматоры в цепи обратной связи регистров сдвига определяются полиномами $h_1(x) = x^6 + x^2 + 2x + 2$ и $h_{7938}(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 2$. Ячейки регистра сдвига представляют собой устройства, которые могут находиться в пяти состояниях и строиться с помощью трех триггеров. На схеме в качестве начальных состояний первого регистра используются первые шесть символов записи МП в каноническом виде с полиномом $h_1(x)$. Начальное состояние второго регистра определено децимацией по индексу $d_j = 7938$ базисной МП с полиномом $h_1(x)$. Коэффициенты умножения в умножителях по mod 5 равны обратным по сложению коэффициентам h_i неприводимых полиномов. Выходы регистров подключены к общему сумматору по mod 5, который является выходом устройства.

Основные характеристики малых множеств КПП, формируемых в конечных полях $GF(5^S)$ для четных значений параметра $S = 4, 6$, приведены в табл. 5.

Таблица 5. Характеристики малых множеств пятеричных КПП

S	N	$I_{S,МК} = (d_1, d_2)$	Значения ПВКФ	$ R_{max} $	$ r_{max} $	Число уровней ПВКФ	$V_{S,МК}$	$M_{S,МК}$
4	624	26, 338	-26; -8,73; -1; 19,23	26	0,042	4	25	96
6	15624	126, 7938	-126; -39,63; -1; 100,13	126	0,008	4	125	1440

Таким образом, на основе корреляционного анализа в статье получены полные наборы векторов индексов децимации $I_{S,МК} = (d_1, \dots, d_n)$ для формирования малых множеств пятеричных КПП с низким уровнем взаимной корреляции в полях $GF(5^S)$ при $S = 4, 6$. Показано, что максимальные значения модуля взаимной корреляционной функции $|R_{max}|_{S,МК}$, а также объем $V_{S,МК}$ малых множеств КПП удовлетворяют граничным оценкам, полученным в [5, 6] для двоичных последовательностей.

Полученные результаты могут применяться при формировании многофазных сигналов с расширенным спектром в СПЦИ для повышения помехозащищенности в случае передачи информации по радиоканалам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ипатов В. П.* Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения. М.: Техносфера, 2007. 488 с.
2. *Вишневецкий В. М., Ляхов А. И., Портной С. Л., Шахнович И. В.* Широкополосные беспроводные сети передачи информации. М.: Техносфера, 2005. 592 с.
3. *Скляр Б.* Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. М.: Вильямс. 2003. 1104 с.
4. CDMA: прошлое, настоящее, будущее / Под ред. *Л. Е. Варакина и Ю. С. Шинакова.* М.: МАС, 2003. 608 с.
5. *Golomb S. W., Gong G.* Signal Design for Good Correlation for Wireless Communication, Cryptography and Radar. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
6. *Ипатов В. П.* Периодические дискретные сигналы с оптимальными корреляционными свойствами. М.: Радио и связь, 1992. 152 с.
7. *Gold R.* Maximal recursive sequences with 3-valued recursive cross-correlation functions // IEEE Trans. Inf. Theory. 1968. Vol. 14, N 1. P. 154.
8. *Boztaş S., Özbudak F., Tekin E.* Generalized nonbinary sequences with perfect autocorrelation flexible alphabets and new periods // Cryptogr. Commun. 2018. Vol. 10, N 3. P. 509.
9. *Cho Ch.-M., Kim J.-Y., No J. S.* New p-ary sequence families of period $(p^n - 1)/2$ with good correlation property using two decimated m-sequences // IEICE Transactions on Communications. 2015. Vol. E98, N 7. P. 1268.
10. *Стародубцев В. Г.* Формирование пятеричных последовательностей Гордона–Миллса–Велча для систем передачи дискретной информации // Тр. СПИИРАН. 2019. Т. 18, № 4. С. 912.
11. *Choi S. T., Lim T., No J. S., Chung H.* On the Cross-Correlation of a p-ary m-Sequence of Period $p^{2m} - 1$ and Its Decimated Sequences by $(p^m + 1)^2/2(p + 1)$ // IEEE Trans. Inf. Theory. 2012. Vol. 58, N 3. P. 1873.
12. *Xia Y., Chen S.* A new family of p-ary sequences with low correlation constructed from decimated sequences // IEEE Trans. Inf. Theory. 2012. Vol. 58, N 9. P. 6037.
13. *Lee W., Kim J.-Y., No J. S.* New families of p-ary sequence of period $(p^n - 1)/2$ with low maximum correlation magnitude // IEICE Transactions on Communications. 2014. Vol. E97-B, N 1. P. 2311.
14. *Song M. K., Song H. Y.* A construction of odd length generators for optimal families of perfect sequences // IEEE Trans. Inf. Theory. 2018. Vol. 64, N 4. P. 2901.
15. *Стародубцев В. Г.* Множества недвоичных последовательностей с низким уровнем взаимной корреляции для систем передачи цифровой информации // Радиотехника и электроника. 2023. Т. 68, № 2. С. 146.
16. *Helleseth T., Kumar P. V., Martinsen H.* A new family of ternary sequences with ideal two-level autocorrelation function // Designs, Codes and Cryptography. 2001. Vol. 23, N 2. P. 157.
17. *Jang J. W., Kim Y. S., No J. S., Helleseth T.* New family of p-ary sequences with optimal correlation property and large linear span // IEEE Trans. Inf. Theory. 2004. Vol. 50, N 8. P. 1839.
18. *Стародубцев В. Г., Четвериков Е. А.* Формирование множеств троичных касами-подобных последовательностей для систем передачи цифровой информации // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 10. С. 807.
19. *Стародубцев В. Г., Ткаченко В. В.* Формирование множеств пятеричных голд-подобных последовательностей для систем передачи цифровой информации // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 2. С. 107.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Виктор Геннадьевич Стародубцев — канд. техн. наук, доцент; Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, кафедра технологий и средств автоматизации обработки и анализа информации космических средств; преподаватель; E-mail: vgstarod@mail.ru

Ян Геннадьевич Морозов — Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, кафедра технологий и средств автоматизации обработки и анализа информации космических средств; слушатель; E-mail: vka@mil.ru

Поступила в редакцию 22.04.2024; одобрена после рецензирования 26.04.2024; принята к публикации 19.06.2024.

REFERENCES

1. Ipatov V.P. *Spread Spectrum and CDMA. Principles and Applications*, NY, John Wiley and Sons Ltd., 2005, 488 p.
2. Vishnevskij V.M., Lyahov A.I., Portnoj S.L., Shahnovich I.V. *Shirokopolosnye besprovodnye seti peredachi informacii* (Broadband Wireless Data Transmission Network), Moscow, 2005, 592 p. (in Russ.)
3. Sklar B. *Digital Communications: Fundamentals and Applications*, Prentice Hall, 2001, 1079 p.

4. Varakin L.E. and Shinakov Yu.S., ed., *CDMA: proshloe, nastoyashchee, budushchee* (CDMA: Past, Present, Future), Moscow, 2003, 608 p. (in Russ.)
5. Golomb S.W., Gong G. *Signal Design for Good Correlation for Wireless Communication, Cryptography and Radar*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2005.
6. Ipatov V.P. *Periodicheskie diskretnye signaly s optimal'nymi korrelyacionnymi svojstvami* (Periodic Discrete Signals with Optimum Correlation Properties), Moscow, 1992, 152 p. (In Russ.)
7. Gold R. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 1968, no. 1(14), pp. 154.
8. Boztaş S., Özbudak F., Tekin E. *Cryptogr. Commun.*, 2018, no. 3(10), pp. 509.
9. Cho Ch.-M., Kim J.-Y., No J.S. *IEICE Transactions on Communications*, 2015, no. 7(E98), pp. 1268.
10. Starodubtsev V.G. *Trudy SPIIRAN* (SPIIRAS Proceedings), 2019, no. 4(18), pp. 912. (in Russ.)
11. Choi S.T., Lim T., No J.S., Chung H. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2012, no. 3(58), pp. 1873.
12. Xia Y., Chen S. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2012, no. 9(58), pp. 6037.
13. Lee W., Kim J.-Y., No J.S. *IEICE Transactions on Communications*, 2014, no. 1(E97-B), pp. 2311.
14. Song M.K., Song H.Y. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2018, no. 4(64), pp. 2901.
15. Starodubtsev V.G. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2023, no. 2(68), pp. 128. (in Russ.)
16. Helleseth T., Kumar P.V., Martinsen H. *Designs, Codes and Cryptography*, 2001, no. 2(23), pp. 157.
17. Jang J.W., Kim Y.S., No J.S., Helleseth T. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2004, no. 8(50), pp. 1839.
18. Starodubtsev V.G., Chetverikov E.A. *Journal of Instrument Engineering*, 2023, no. 10(66), pp. 807. (in Russ.)
19. Starodubtsev V.G., Tkachenko V.V. *Journal of Instrument Engineering*, 2024, no. 2(67), pp. 107. (in Russ.)

DATA ON AUTHORS

- | | |
|-------------------------------|---|
| Victor G. Starodubtsev | — PhD, Associate Professor; A. F. Mozhaisky Military Space Academy, Department of Technologies and Automation Tools for Processing and Analysis of Spacecraft Information; Lecturer; E-mail: vgstarod@mail.ru |
| Yan G. Morozov | — A. F. Mozhaisky Military Space Academy, Department of Technologies and Automation Tools for Processing and Analysis of Spacecraft Information; Student; E-mail: vka@mil.ru |

Received 22.04.2024; approved after reviewing 26.04.2024; accepted for publication 19.06.2024.

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ КЛАСТЕРА
С КОНТЕЙНЕРНОЙ ВИРТУАЛИЗАЦИЕЙ****В. К. Фунг¹, В. А. Богатырев^{1,2*}**¹ Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия² Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
Санкт-Петербург, Россия

* vladimir.bogatyrev@gmail.com

Аннотация. Экспериментально исследована интенсивность обслуживания запросов при автоматическом разделении ресурсов компьютерной системы между активными, т. е. используемыми в текущий момент времени, контейнерами. На первом этапе экспериментов выполняется формирование и развертывание сервиса (веб-сервера) на кластере. На втором этапе осуществляется запуск тестовой программы с сохранением результатов в лог-файле. Предложены алгоритмы проведения экспериментов на первом и втором этапе. Эксперименты проведены в лабораторной среде облачной виртуализации Proxmox и средств управления кластером Kubernetes. Для автоматизации развертывания и обновления конфигурации сервиса на кластере Kubernetes разработана программа на языке программирования Python. Программа использует библиотеки SCP и PARAMIKO для удаленного развертывания и обновления сервиса. Выявлено влияние распределения ограниченных возможностей ресурсов системы между активными и развернутыми в системе (виртуальной машине) контейнерами на интенсивность обслуживания запросов. Полученные результаты могут быть использованы при разработке аналитической модели обслуживания системы с контейнерной виртуализацией, в том числе виртуальных кластерных систем.

Ключевые слова: кластер, Kubernetes, интенсивность обслуживания, Docker, контейнер, виртуализация, виртуальная машина

Ссылка для цитирования: Фунг В. К., Богатырев В. А. Экспериментальное исследование производительности кластера с контейнерной виртуализацией // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 8. С. 647–656. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-8-647-656.

EXPERIMENTAL STUDY OF CLUSTER PERFORMANCE WITH CONTAINER VIRTUALIZATION**Phung Van Quy¹, V. A. Bogatyrev^{1,2*}**¹ ITMO University, St. Petersburg, Russia² Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, St. Petersburg, Russia

* vladimir.bogatyrev@gmail.com

Abstract. The intensity of query servicing during automatic division of computer system resources between active, i.e. currently used, containers is investigated experimentally. At the first stage of experiments, the formation and deployment of a service (web server) on a cluster is performed. At the second stage, a test program is launched with the results saved in a log file. Algorithms for conducting experiments at the first and second stages are proposed. The experiments are conducted in a laboratory environment of Proxmox cloud virtualization and Kubernetes cluster management tools. A program in the Python programming language is developed to automate the deployment and update of the service configuration on the Kubernetes cluster. The program uses the SCP and PARAMIKO libraries for remote deployment and update of the service. The influence of the distribution of limited system resource capabilities between active and deployed containers in the system (virtual machine) on the intensity of request servicing was revealed. The obtained results can be used in the development of an analytical model for servicing a system with container virtualization, including virtual cluster systems.

Keywords: cluster, Kubernetes, servicing intensity, Docker, container, virtualization, virtual machine

For citation: Quy Phung Van, Bogatyrev V. A. Experimental study of cluster performance with container virtualization. *Journal of Instrument Engineering*. 2024. Vol. 67, N 8. P. 647–656 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-8-647-656.

Введение. Снижение рисков, связанных с цифровой трансформацией [1, 2], сопряжено, прежде всего, с возрастающими требованиями к отказоустойчивости и надежности [3, 4] современных распределенных компьютерных систем [5]. Для распределенных систем реального времени, в том числе промышленных и киберфизических [6, 7], дополнительные риски могут быть связаны с требованием выполнения запросов за ограниченное время [8, 9]. Обеспечению высокой надежности, отказоустойчивости современных инфокоммуникационных систем служит их адаптивная реконфигурация [10] с перераспределением трафика [11, 12].

Один из способов повышения отказоустойчивости, надежности и производительности компьютерных систем — объединение ресурсов в кластер [13–15] с сохранением его высокой доступности, малых задержек и высокой надежности передачи данных [16, 17].

Технология виртуальных машин, позволяющая при отказах физических серверов восстанавливать работоспособность кластера в случае миграции виртуальных машин с отказавших физических серверов на исправные, обеспечивает повышение надежности и отказоустойчивости кластерных систем. В [18–21] предложены марковские модели кластеров, обеспечивающие работоспособность кластеров с миграцией виртуальных машин. Модели оценки производительности отказоустойчивых кластеров рассмотрены в статьях [22–24]; влияние на производительность серверов миграции виртуальных машин в процессе восстановления работоспособности кластеров — в работах [25–27].

В последнее время концепция построения высоконадежных отказоустойчивых кластеров с использованием виртуальных машин получила развитие на основе технологии контейнерной виртуализации.

Виртуальная контейнеризация позволяет упаковывать приложения в контейнеры, обеспечивая наличие необходимых средств для их выполнения. В отличие от виртуальных машин, контейнеры используют общие ядра операционной системы только в рамках одного процесса и одной файловой системы. Это обеспечивает меньшие затраты ресурсов на поддержание контейнеров, делает их быстро запускаемыми и масштабируемыми, что открывает дополнительные возможности высокоскоростной реконфигурации и восстановления функционирования после обнаружения отказов оборудования и программного обеспечения.

Контейнеризация позволяет управлять ресурсами эффективно, запуская и масштабируя приложения по мере необходимости, что способствует поддержанию высокой производительности даже при растущей нагрузке.

Контейнеры создают изолированные среды выполнения, что позволяет избежать конфликтов между приложениями и обеспечивает предсказуемое поведение даже при изменениях в окружении или конфигурации. Кроме того, системы управления контейнерами, такие как Kubernetes, предоставляют средства для автоматического восстановления приложений в случае сбоев или неполадок, что повышает надежность системы в целом.

Сравнительная оценка производительности контейнеров и виртуальных машин на различных аппаратных платформах, включая различные тестовые эталонные примеры (бенчмарки) и различные типы платформ контейнеризации, проведена в статье [28]. Предложенный в работе [29] метод тестирования безопасности веб-приложений, в котором использовались контейнеры Docker при динамическом и статическом анализе безопасности, а также проверке зависимостей, продемонстрировал потенциал контейнеризации для обеспечения безопасности информационных систем. Эффективность технологий виртуальных машин и контейнерной виртуализации в вычислительных системах с анализом влияния этих технологий на производительность и масштабируемость приложений в критически важных областях рассмотрена в работе [30]. Эффективность применения виртуальных машин и контейнеров приложений для облачных платформ по таким критериям, как производительность, масштабируемость и изоляция пользователей, проанализирована в работе [31].

Особенностью контейнерной виртуализации, реализуемой в виртуальной машине, является динамическое распределение выделяемых ресурсов между активными, т. е. задействованными в процессе обслуживания запросов, контейнерами. При этом ресурсы выделяются по мере

обращения к контейнерам и закрепляются за ними на требуемое время. В настоящее время обоснование построения моделей, отражающих указанную особенность динамического разделения ресурсов системы между активными контейнерами при обслуживании запросов, требует дополнительных исследований.

Представленные в настоящей статье исследования являются развитием выполненных в [32] работ по экспериментальному определению интенсивности обслуживания запросов контейнерами. В настоящей работе предложена усовершенствованная двухэтапная методика исследования влияния совместного использования ограниченных ресурсов системы между активными и развернутыми в системе (виртуальной машине) контейнерами на интенсивность обслуживания запросов.

Средства проведения эксперимента. Целью эксперимента является анализ зависимости интенсивности обслуживания запросов каждым контейнером от общего числа контейнеров, сформированных в системе, и числа активных контейнеров, участвующих в выполнении запросов.

Эксперимент проведен с использованием стенда, содержащего компьютер с четырьмя процессорами Intel(R) Core(TM) i5-4570 @ 3,20 ГГц, работающий под управлением ядра Linux версии 6.2.16-3-pve на платформе Proxmox. Эксперимент проведен для виртуального сервера с одним виртуальным ядром, одним виртуальным сокетом и 4 ГБ оперативной памяти.

На одном узле кластера, который представляет собой изолированную виртуальную машину (рис. 1), развернут один сервис. В системе развернуто n контейнеров, функционирующих как однопоточные HTTP веб-серверы. Для исследования интенсивности обслуживания каждого контейнера в условиях наличия m активных контейнеров необходимо обеспечить одновременную работу (активность) m контейнеров. Это достигается с помощью тестовой программы, которая отправляет m запросов одновременно, а затем записывает в лог-файл информацию о времени обработки запроса каждым контейнером. Эта информация содержится в ответе на каждый запрос, отправленный тестовой программой.

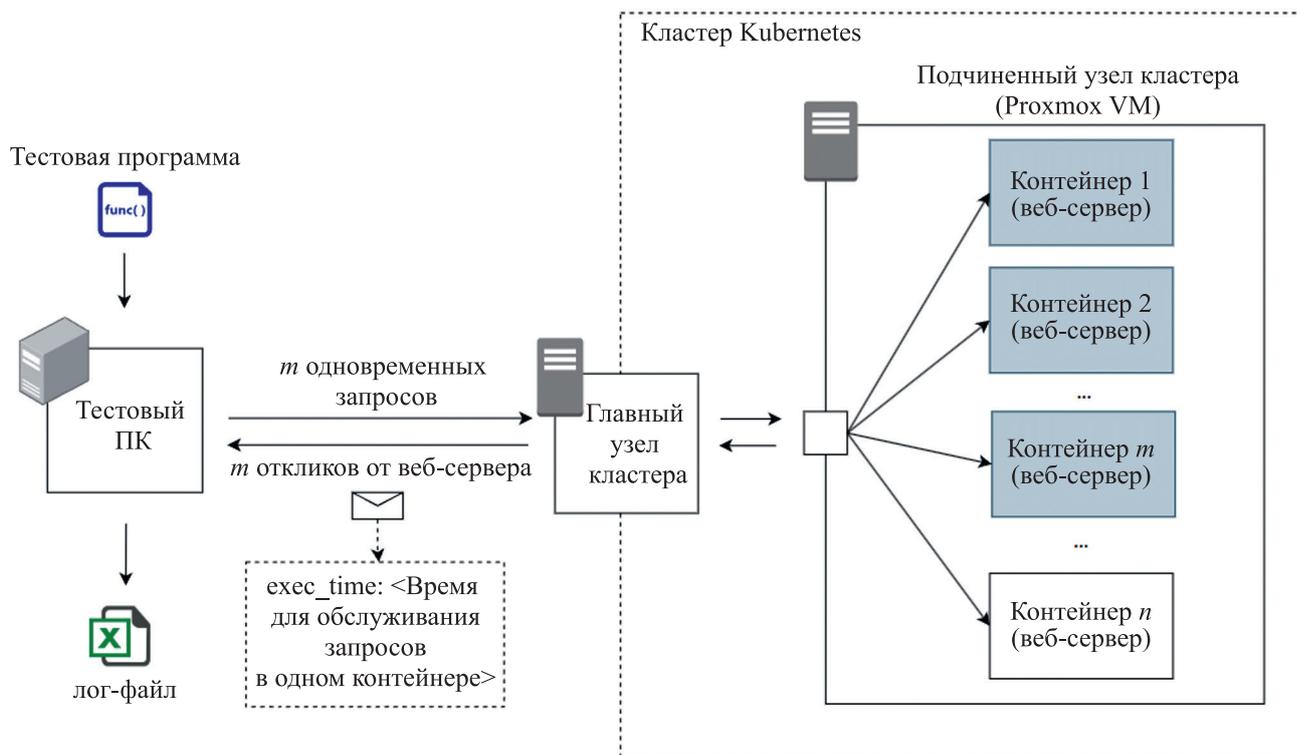


Рис. 1

Методика проведения эксперимента. Предлагаемая методика проведения эксперимента включает два этапа.

- I. Создание и развертывание сервиса (веб-сервера) на кластере.
- II. Создание и запуск тестовой программы с формированием результатов в лог-файле.

Алгоритм реализации эксперимента на этапе I методики (рис. 2) предусматривает выполнение следующих процедур.

1. Формируется исходный код веб-сервера образа контейнера. Для развертывания сервиса используется Dockerfile [33], при этом указываются версии применяемого программного обеспечения, производятся установка и настройка необходимых средств.
2. Полученный образ контейнера загружается в реестр контейнеров [34] (Container Registry). Реестр обеспечивает доступ к образам из любого места и облегчает автоматизацию процесса развертывания приложений в контейнерах (в качестве реестра контейнеров в настоящей работе используется DockerHub).
3. После того как образ контейнера становится доступным в реестре, создается файл конфигурации развертывания (Deployment.yaml). Этот файл определяет число реплик, стратегии обновления и образ контейнера из реестра контейнеров. Deployment.yaml упрощает процесс развертывания и управления приложением в кластере, повышая его надежность и масштабируемость.
4. После получения полного файла Deployment.yaml в кластере Kubernetes приложение развертывается при помощи API Kubernetes или широко используемого инструмента развертывания Helm. Helm представляет собой механизм управления пакетами приложений, он обеспечивает упрощенную установку, управление настройками виртуализации с возможностью отката к предыдущим значениям, параметризацию и обновление приложений, что существенно повышает эффективность и масштабируемость процесса управления приложениями в Kubernetes.



Рис. 2

Рис. 3, а иллюстрирует процесс создания образа контейнера, а рис. 3, б — его загрузку в реестр контейнеров. На рис. 4 представлен результат развертывания сервиса на узле кластера.

В ходе эксперимента после завершения этапа I методики выполняется повторный запуск команды инструмента Helm для изменения числа контейнеров или реплик приложения. Для автоматизации этого процесса во время выполнения теста потребовался инструмент, позволяющий тестовой программе подключаться к кластеру и управлять этими настройками, — в настоящей работе использованы библиотеки Python SCPClient. Этот инструмент позволяет устанавливать связь с главным узлом кластера и выполнять команды Helm для изменения конфигурации приложения, а также для повторного развертывания приложения с различными параметрами, включая число реплик (контейнеров).

a)

```
$ make build_image
docker build -t phungvanquy/loadtest .
[+] Building 3.2s (9/9) FINISHED
=> [internal] load .dockerignore
=> => transferring context: 2B
=> [internal] load build definition from Dockerfile
=> => transferring dockerfile: 363B
=> [internal] load metadata for docker.io/library/python:3.9-alpine
=> [auth] library/python:pull token for registry-1.docker.io
=> [1/3] FROM docker.io/library/python:3.9-alpine@sha256:99161d2323b4130fed2d849dc8ba35274d1e1f35da170435627b21d305dad954
=> [internal] load build context
                                0.0s
=> => exporting layers
=> => writing image sha256:4607aabe9f6659451eb351604865edf439faaee78d10ba26050564e906279c8
=> => naming to docker.io/phungvanquy/loadtest

$ make publish_image
docker tag phungvanquy/loadtest:latest phungvanquy/loadtest:latest
docker push phungvanquy/loadtest:latest
The push refers to repository [docker.io/phungvanquy/loadtest]
a285dc5edc9c: Layer already exists
e4fa09a2ee3d: Layer already exists
4857056bad11: Layer already exists
69141b6c4721: Layer already exists
0bbac9765c1f: Layer already exists
4c9c2b9681ab: Layer already exists
d4fc045c9e3a: Layer already exists
latest: digest: sha256:df2eff0b271c37b9ca5fc0b30c87993a698dc407720418d012e2d5f4f9f33ebf size: 1781
```

b)

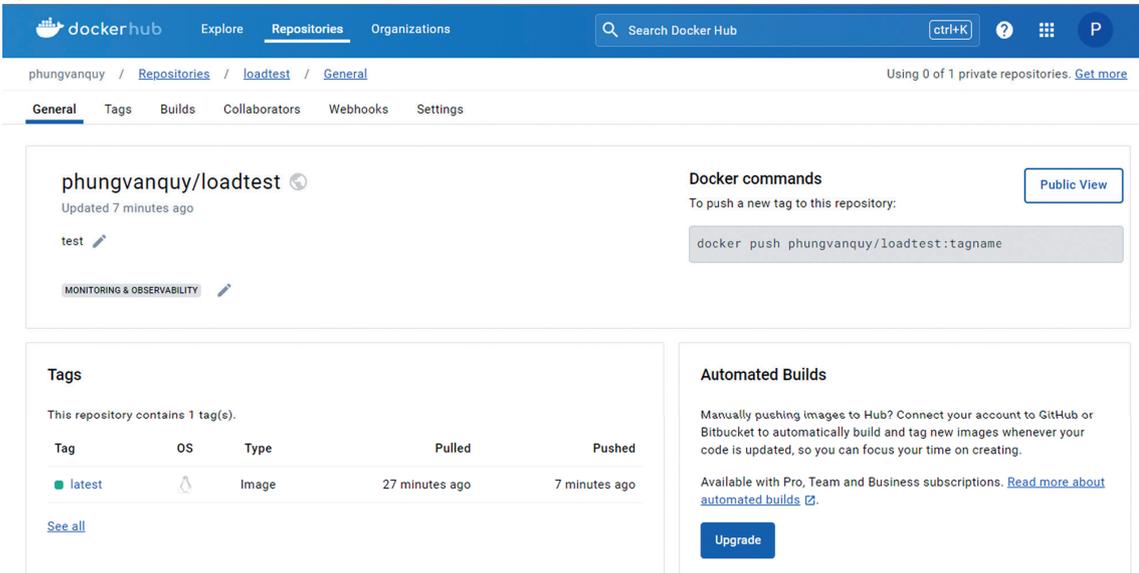


Рис. 3



Рис. 4

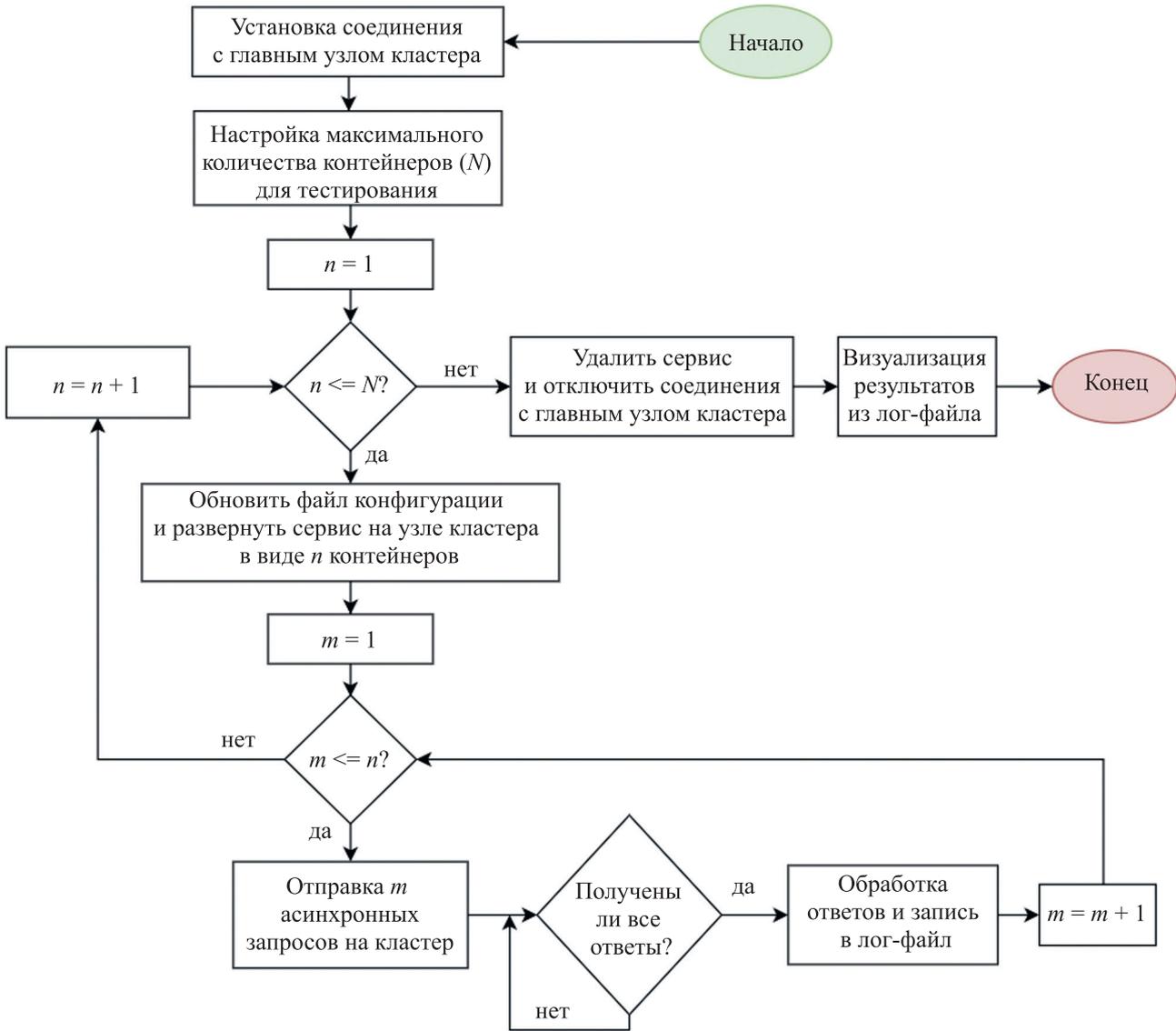


Рис. 5

Эксперимент этапа II методики выполняется в соответствии с алгоритмом, блок-схема которого приведена на рис. 5. После инициализации тестовой программы необходимо установить соединение с кластером для удаленного управления процессом развертывания сервиса. Каждый раз при изменении значения переменной n (число развернутых контейнеров), где $1 \leq n \leq N$ (N — максимальное число контейнеров для эксперимента), происходят процессы обновления файла конфигурации и развертывания сервиса. Для каждого n осуществляется отправка m ($1 \leq m \leq n$) одновременных запросов на кластер с целью обеспечения активности m контейнеров. Затем обрабатываются ответы от кластера, содержащие время обслуживания запроса в каждом контейнере. Результаты обработки усредняются, а обратные значения представляют собой среднюю интенсивность обслуживания каждого контейнера при n развернутых и m активных контейнерах.

Результаты второго этапа эксперимента представлены на рис. 6. Полученные данные описаны в файле `processing_time.csv` (рис. 6, а) в следующем формате: „<Количество развернутых контейнеров>, <Количество активных контейнеров>, <время обслуживания запросов в одном контейнере>“. На рис. 6, б проиллюстрирована зависимость интенсивности обслуживания от числа контейнеров. Полученные данные показывают, что интенсивность обслуживания запросов каждым контейнером $\mu(n, m)$ существенно снижается с увеличением числа активных контейнеров m . При одинаковом числе активных контейнеров интенсивность обработки контейнера оказывается выше, когда количество развернутых контейнеров n меньше.

a)

```

phung@DESKTOP-1TN808J MSYS /e/Main/PhD/MY_PAPER/Paper_4/source_code
$ python main.py
Command output:
NAME: loadtest
LAST DEPLOYED: Mon May 6 08:17:23 2024
NAMESPACE: default
STATUS: deployed
REVISION: 1
TEST SUITE: None

Testing with 1 containers...
processing time: 0.04795646667480469
processing time: 0.04504227638244629
processing time: 0.04404306411743164
processing time: 0.04422736167907715
processing time: 0.04475092887878418
processing time: 0.04456734657287598
processing time: 0.04530477523803711
processing time: 0.04499316215515137
processing time: 0.046623945236206055
processing time: 0.044248104095458984
processing time: 0.044509172439575195
processing time: 0.0447545051574707
processing time: 0.043845415115356445
processing time: 0.04502105712890625
processing time: 0.045273780822753906
processing time: 0.04488420486450195
processing time: 0.04462623596191406
processing time: 0.04764604568481445
processing time: 0.04485594635009766
processing time: 0.044187307357788086

phung@DESKTOP-1TN808J MINGW64 /e/Main/PhD/MY_PAPER/Paper_4/source_code
$ cat processing_time.csv
1,1,0.04483171075384733
2,1,0.04494697603081285
2,2,0.06680559119354695
3,1,0.04495987906134373
3,2,0.07447734390117614
3,3,0.0848271019088936
4,1,0.04518440436079817
4,2,0.0779010767916447
4,3,0.09547542732800487
4,4,0.10404659086067862
5,1,0.04517131038685311
5,2,0.08030794677837594
5,3,0.10202490792447003
5,4,0.11536908772796232
5,5,0.12777956369513513
6,1,0.045254836243063486
6,2,0.08145403479090416
6,3,0.10626920702092184
6,4,0.12435894563633909
6,5,0.1370989684290534
6,6,0.14685560187298446
7,1,0.04530305951821837
7,2,0.0830054902104169
7,3,0.11111775836274948
7,4,0.12874170543598706
7,5,0.14788187586344206
7,6,0.15788678648651286
7,7,0.16717443173592295
8,1,0.0454759087562561
    
```

b)

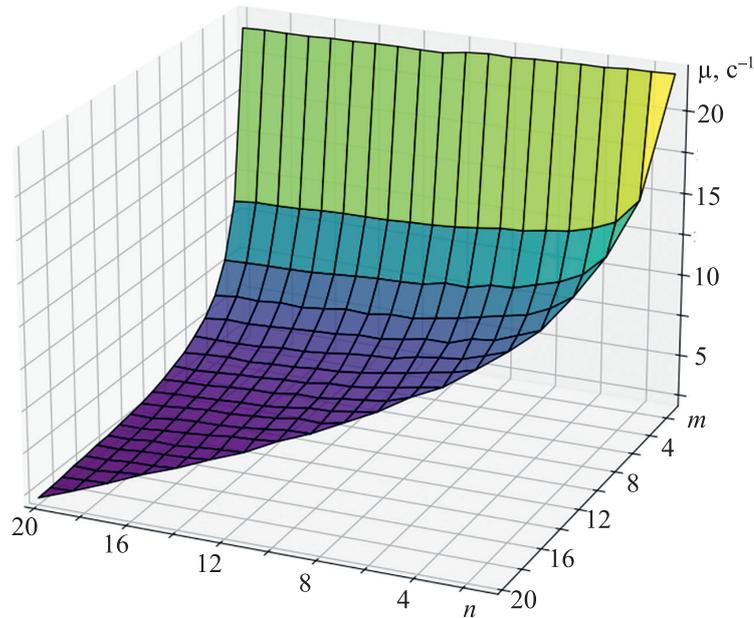


Рис. 6

Заключение. Для компьютерных систем с контейнерной виртуализацией экспериментально установлено влияние работы контейнеров на интенсивность их обслуживания при автоматическом разделении ресурсов системы между активными контейнерами. Определено влияние изменения общего числа контейнеров на интенсивность обработки запросов.

Полученные результаты могут быть использованы для разработки аналитической модели обслуживания компьютерной системы с контейнерной виртуализацией, в том числе кластерных систем виртуальных машин с развертыванием в них контейнеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зинина Т. С., Рудник П. Б.* Цифровая трансформация: ожидания и реальность. М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2022. 221 с.
2. *Емельянов А. А., Кориунов И. Л.* Технические риски предприятия, связанные с цифровой трансформацией // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 2. С. 116–121.
3. *Половко А. М., Гуров С. В.* Основы теории надежности. СПб: БХВ-Петербург, 2006. 702 с.
4. *Черкесов Г. Н.* Надежность аппаратно-программных комплексов. СПб: Питер, 2005. 479 с.
5. *Херсонский Н. С., Большедворская Л. Г.* Анализ развития статистических методов оценки надежности как свойства качества объектов и продукции // Crede Experto: транспорт, общество, образование, язык. 2024. № 1. С. 6–23. DOI: 10.51955/2312-1327_2024_1_6.
6. *Astakhova T., Shamin A., Verzun N., Kolbanov M. A.* A model for estimating energy consumption seen when nodes of ubiquitous sensor networks communicate information to each other // CEUR Workshop Proceedings. 2019. Vol. 2344, N 2.
7. *Gurjanov A. V., Korobeynikov A. G., Zharinov I. O., Zharinov O. O.* Edge, fog and cloud computing in the cyber-physical systems networks // III International Workshop on Modeling, Information Processing and Computing. 2021. P. 103–108.
8. *Богатырев В. А., Богатырев С. В., Богатырев А. В.* Оценка готовности компьютерной системы к своевременному обслуживанию запросов при его совмещении с информационным восстановлением памяти после отказов // Науч.-техн. вестн. информационных технологий, механики и оптики. 2023. Т. 23, № 3. С. 608–617.
9. *Feng, D., Lai, L., Luo, J. et al.* Ultra-reliable and low-latency communications: applications, opportunities and challenges // Sci. China Inf. Sci. 2021. Vol. 64. P. 1–12. DOI: 10.1007/s11432-020-2852-1.
10. *Богатырев В. А.* Надежность и эффективность резервированных компьютерных сетей // Информационные технологии. 2006. № 9. С. 25–30.
11. *Богатырев В. А., Богатырев А. В.* Оптимизация резервированного распределения запросов в кластерных системах реального времени // Информационные технологии. 2015. Т. 21, № 7. С. 495–502.
12. *Богатырев В. А., Богатырев А. В., Богатырев С. В.* Перераспределение запросов между вычислительными кластерами при их деградации // Изв. вузов. Приборостроение. 2014. Т. 57, № 9. С. 54–58.
13. *Татарникова Т. М., Архипцев Е. Д., Кармановский Н. С.* Определение размера кластера и числа реплик высоконагруженных информационных систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 8. С. 646–651.
14. *Богатырев В. А., Богатырев А. В.* Надежность функционирования кластерных систем реального времени с фрагментацией и резервированным обслуживанием запросов // Информационные технологии. 2016. Т. 22, № 6. С. 409–416.
15. *Богатырев В. А., Богатырев С. В., Богатырев А. В.* Оптимизация кластера с ограниченной доступностью кластерных групп // Науч.-техн. вестн. Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. 2011. № 1. С. 63–67.
16. *Андреев С. Д., Самуйлов К. Е., Тюрликов А. М.* Управление потоками в гетерогенных мобильных сетях радиодоступа с соединениями устройство–устройство // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. 2018. Т. 26, № 4. С. 357–370.
17. *Bogatyrev V. A., Bogatyrev S. V., Bogatyrev A. V.* Model and interaction efficiency of computer nodes based on transfer reservation at multipath routing // Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems. 2019. P. 8840647.
18. *Lambropoulos G., Douligieris C., Mitropoulos S.* Improving business performance by employing virtualization technology: a case study in the financial sector // Computers. 2021. Vol. 10, N 4.
19. *Bogatyrev V., Derkach A.* Evaluation of a cyber-physical computing system with migration of virtual machines during continuous computing // Computers. 2020. Vol. 9, N 2. P. 42.
20. *Shi F., Lin J.* Virtual machine resource allocation optimization in cloud computing based on multiobjective genetic algorithm // Computational Intelligence and Neuroscience. 2022. Vol. 2022. P. 7873131.
21. *Bogatyrev V. A., Aleksankov S. M., Derkach A. N.* The model of reliability of dulated real-time computers for cyber-physical systems // Physical Systems: Industry 4.0 Challenges. Studies in Systems, Decision and Control. 2020. Vol. 260. P. 11–21.
22. *Волков А. О.* Оценка производительности кластера облачных вычислений // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2020. Т. 14, №12. С. 72–79. DOI: 10.36724/2072-8735-2020-14-12-72-79.
23. *Хомоненко А. Д., Благовещенская Е. А., Проурзин О. В., Андрук А. А.* Прогноз надежности кластерной вычислительной системы с помощью полумарковской модели альтернирующих процессов и мониторинга // Научно-технологические исследования в космических исследованиях Земли. 2018. Т. 10, № 4. С. 72–82. DOI: 10.24411/2409-5419-2018-10099.

24. Tourouta E., Gorodnichev M., Polyantseva K., Moseva M. Providing fault tolerance of cluster computing systems based on fault-tolerant dynamic computation planning // *Digitalization of Society, Economics and Management: A Digital Strategy Based on Post-pandemic Developments*. 2022. P. 143–150. DOI: 10.1007/978-3-030-94252-6_10.
25. Шибаев Р. В. Анализ методов повышения надежности сетей при виртуализации сетевых компонентов // *Автоматизация. Современные технологии*. 2023. Т. 77, № 2. С. 74–81.
26. Александров С. М. Модели динамической миграции с итеративным подходом и сетевой миграции виртуальных машин // *Науч.-техн. вестн. информационных технологий, механики и оптики*. 2015. Т. 15, № 6. С. 1098–1104.
27. Toutov A., Vorozhtsov A., Toutova N. Analytical approach to estimating total migration time of virtual machines with various applications // *Intern. J. of Embedded and Real-Time Communication Systems*. 2020. Vol. 11, N 2. P. 58–75.
28. Agasizade H., Ataie E., Bastam M. Experimental Assessment of Containers Running on Top of Virtual Machines // *arXiv preprint*. 2024. DOI: 10.13140/RG.2.2.11457.33129.
29. Pathirathna P. P. W., Ayesha V. A. I., Imihira W. A. T., Wasala W. M. J. C., Kodagoda N., Edirisinghe E. A. T. D. Security testing as a service with docker containerization // *11th Intern. Conf. on Software, Knowledge, Information Management and Applications (SKIMA)*. 2017. P. 1–7. DOI: 10.1109/SKIMA.2017.8294109.
30. Zhou Yuyu et al. Comparison of virtualization and containerization techniques for high performance computing // *Proc. of the 2015 ACM/IEEE Conf. on Supercomputing*. 2015.
31. Mavridis I., and Karatza H. Combining containers and virtual machines to enhance isolation and extend functionality on cloud computing // *Future Generation Computer Systems*. 2019. Vol. 94. P. 674–696. DOI: 10.1016/j.future.2018.12.035.
32. Фунг В. К., Богатырев В. А., Кармановский Н. С., Лэ В. Х. Оценка вероятностно-временных характеристик компьютерной системы с контейнерной виртуализацией // *Науч.-техн. вестн. информационных технологий, механики и оптики*. 2024. Т. 24, № 2. С. 249–255. DOI: 10.17586/2226-1494-2024-24-2-249-255.
33. Wu Y., Zhang Y., Wang T., Wang H. Characterizing the Occurrence of Dockerfile Smells in Open-Source Software: An Empirical Study // *IEEE Access*. 2020. Vol. 8. P. 34127–34139. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.2973750.
34. Liu Guannan, Xing Gao, Haining Wang, Kun Sun. Exploring the uncharted space of container registry typosquatting // *31st USENIX Security Symposium (USENIX Security 22)*. 2022. P. 35–51.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Фунг Ван Кю

— аспирант; Университет ИТМО, факультет программной инженерии и компьютерной техники; E-mail: phungvanquy97@gmail.com

Владимир Анатольевич Богатырев

— докт. техн. наук, профессор; Университет ИТМО, факультет программной инженерии и компьютерной техники; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра информационной безопасности; E-mail: vladimir.bogatyrev@gmail.com

Поступила в редакцию 14.03.2024; одобрена после рецензирования 20.03.2024; принята к публикации 19.06.2024.

REFERENCES

1. Zinina T.S., Rudnik P.B. *Tsifrovaya transformatsiya: ozhidaniya i real'nost'* (Digital Transformation: Expectations and Reality), Moscow, 2022, 221 p. (in Russ.)
2. Emelyanov A.A., Korshunov I.L. *Journal of Instrument Engineering*, 2024, no. 2(67), pp. 116–121. (in Russ.)
3. Polovko A.M., Gurov S.V. *Osnovy teorii nadezhnosti* (Fundamentals of Reliability Theory), St. Petersburg, 2006, 702 p. (in Russ.)
4. Cherkesov G.N. *Nadezhnost' apparatno-programmnykh kompleksov* (Reliability of Hardware and Software Systems), St. Petersburg, 2005, 479 p. (in Russ.)
5. Khersonsky N.S., Bolshedvorskaya L.G. *Crede Experto: transport, society, education, language*, 2024, no. 1, pp. 6–23, DOI: 10.51955/2312-1327_2024_1_6. (in Russ.)
6. Astakhova T., Shamin A., Verzun N., Kolbanev M.A. *CEUR Workshop Proceedings*, 2019, no. 2(2344).
7. Gurjanov A.V., Korobeynikov A.G., Zharinov I.O., Zharinov O.O. *III International Workshop on Modeling, Information Processing and Computing*, 2021, pp. 103–108.
8. Bogatyrev V.A., Bogatyrev S.V., Bogatyrev A.V. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2023, no. 3(23), pp. 608–617. (in Russ.)
9. Feng D., Lai L., Luo J. et al. *Sci. China Inf. Sci.*, 2021, vol. 64, pp. 1–12, DOI: 10.1007/s11432-020-2852-1.
10. Bogatyrev V.A. *Information Technologies*, 2006, no. 9, pp. 25–30. (in Russ.)
11. Bogatyrev V.A., Bogatyrev A.V. *Information Technologies*, 2015, no. 7(21), pp. 495–502. (in Russ.)
12. Bogatyrev V.A., Bogatyrev A.V., Bogatyrev S.V. *Journal of Instrument Engineering*, 2014, no. 9(57), pp. 54–58. (in Russ.)

13. Tatarnikova T.M., Arkhitektsev E.D., Karmanovskiy N.S. *Journal of Instrument Engineering*, 2023, no. 8(66), pp. 646–651. (in Russ.)
14. Bogatyrev V.A., Bogatyrev A.V. *Information Technologies*, 2016, no. 6(22), pp. 409–416. (in Russ.)
15. Bogatyrev V.A., Bogatyrev S.V., Bogatyrev A.V. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2011, no. 1, pp. 63–67. (in Russ.)
16. Andreev S.D., Samouylov K.E., Tyurlikov A.M. *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*, 2018, no. 4(26), pp. 357–370. (in Russ.)
17. Bogatyrev V.A., Bogatyrev S.V., Bogatyrev A.V. *Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems*, 2019, pp. 8840647.
18. Lambropoulos G., Douligieris C., Mitropoulos S. *Computers*, 2021, no. 4(10).
19. Bogatyrev V., Derkach A. *Computers*, 2020, no. 2(9), pp. 42.
20. Shi F., Lin J. *Computational Intelligence and Neuroscience*, 2022, vol. 2022, pp. 7873131.
21. Bogatyrev V.A., Aleksankov S.M., Derkach A.N. *Physical Systems: Industry 4.0 Challenges. Studies in Systems, Decision and Control*, 2020, vol. 260, pp. 11–21.
22. Volkov A.O. *T-Comm: Telecommunications and transport*, 2020, no. 12(14), pp. 72–79, DOI: 10.36724/2072-8735-2020-14-12-72-79. (in Russ.)
23. Khomonenko A.D., Blagoveshchenskaya E.A., Prourzin O.V., Andruk A.A. *High Technologies in Earth Space Research. H&ES Research*, 2018, no. 4(10), pp. 72–82, DOI: 10.24411/2409-5419-2018-10099. (in Russ.)
24. Tourouta E., Gorodnichev M., Polyantseva K., Moseva M. *Digitalization of Society, Economics and Management: A Digital Strategy Based on Post-pandemic Developments*, 2022, pp. 143–150, DOI: 10.1007/978-3-030-94252-6_10.
25. Shibaev R.V. *Avtomatizatsiya. Sovremennyye Tekhnologii*, 2023, no. 2(77), pp. 74–81. (in Russ.)
26. Aleksankov S.M. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, no. 6(15), pp. 1098–1104. (in Russ.)
27. Toutov A., Vorozhtsov A., Toutova N. *International Journal of Embedded and Real-Time Communication Systems*, 2020, no. 2(11), pp. 58–75.
28. Aqasizade H, Ataie E, Bastam M. *arXiv preprint*, 2024, DOI: 10.13140/RG.2.2.11457.33129.
29. Pathirathna P.P.W., Ayesha V.A.I., Imihira W.A.T., Wasala W.M.J.C., Kodagoda N., Edirisinghe E.A.T.D. *11th Intern. Conf. on Software, Knowledge, Information Management and Applications (SKIMA)*, 2017, pp. 1–7, DOI: 10.1109/SKIMA.2017.8294109.
30. Zhou Yuyu et al. *Proc. of the 2015 ACM/IEEE Conf. on Supercomputing*, 2015.
31. Mavridis I., and Karatza H. *Future Generation Computer Systems*, 2019, vol. 94, pp. 674–696, DOI: 10.1016/j.future.2018.12.035.
32. Phung Van Quy, Bogatyrev V.A., Karmanovskiy N.S., Le V. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2024, no. 2(24), pp. 249–255, DOI: 10.17586/2226-1494-2024-24-2-249-255. (in Russ.)
33. Wu Y., Zhang Y., Wang T., Wang H. *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 34127–34139. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.2973750.
34. Liu Guannan, Xing Gao, Haining Wang, Kun Sun. *31st USENIX Security Symposium (USENIX Security 22)*, 2022, pp. 35–51.

DATA ON AUTHORS

- | | |
|------------------------------|---|
| Phung Van Quy | — Post-Graduate Student; ITMO University, Faculty of Software Engineering and Computer Science; E-mail: phungvanquy97@gmail.com |
| Vladimir A. Bogatyrev | — Dr. Sci, Professor; ITMO University, Faculty of Software Engineering and Computer Science; St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Department of Information Security; E-mail: vladimir.bogatyrev@gmail.com |

Received 14.03.2024; approved after reviewing 20.03.2024; accepted for publication 19.06.2024.

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕОДНОРОДНЫХ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ
С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ ПЕРЕХОДНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ****А. В. Земсков**

*Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова,
198035, Санкт-Петербург, Россия
aleksei.zemskov@yandex.ru*

Аннотация. Предложен аналитический подход к исследованию счетных неоднородных марковских цепей на основе z -преобразования. На примере двух вариантов исходных данных для переходных вероятностей марковской цепи показано, что оценки стационарного режима могут существенно исказить представление о поведении системы. Описаны аналитические процедуры получения функций вероятностей при вещественных и комплексно-сопряженных собственных значениях матрицы переходных вероятностей, если ее элементы меняются скачкообразно. Приведены оценки для границ наступления установившегося режима в тактовом времени. Основные выкладки проиллюстрированы оценкой характеристик марковских цепей с учетом влияния переходной динамики при изменении вероятностей состояний и кусочно-постоянном изменении переходных вероятностей на интервале функционирования в тактовом времени.

Ключевые слова: марковская цепь, оператор „вход–выход“ в z -форме, собственные значения, кусочно-постоянное изменение переходных вероятностей, функция вероятности состояния

Ссылка для цитирования: Земсков А. В. Аналитический подход к исследованию неоднородных марковских цепей с кусочно-постоянными изменениями переходных вероятностей // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 8. С. 657–669. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-8-657-669.

**ANALYTICAL APPROACH TO THE STUDY OF HETEROGENEOUS MARKOV CHAINS WITH PIECEWISE
CONSTANT CHANGES IN TRANSITION PROBABILITIES****A. V. Zemskov**

*Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, St. Petersburg, Russia
aleksei.zemskov@yandex.ru*

Abstract. An analytical approach to the study of countable non-homogeneous Markov chains based on the z -transformation is proposed. Using two variants of the initial data for the transition probabilities of a Markov chain as an example, it is shown that estimates of the steady-state mode can significantly distort the understanding of the system behavior. Analytical procedures for obtaining probability functions for real and complex-conjugate eigenvalues of the transition probability matrix are described for the case when its elements change abruptly. Estimates are given for the boundaries of the onset of a steady-state mode in the clock time. The main calculations are illustrated by an assessment of the characteristics of Markov chains taking into account the influence of transition dynamics under variance of the state probabilities and the piecewise constant change in transition probabilities over the operating interval in clock time.

Keywords: Markov chain, z -form input-output operator, eigenvalues, piecewise constant change in transition probabilities, state probability function

For citation: Zemskov A. V. Analytical approach to the study of heterogeneous Markov chains with piecewise constant changes in transition probabilities. *Journal of Instrument Engineering*. 2024. Vol. 67, N 8. P. 657–669 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-8-657-669.

Введение. Марковские процессы (МП) широко применяются при исследовании различных стохастических систем [1–4]. При этом наиболее проработаны процедуры исследования установившихся режимов при стационарном представлении соответствующих математических моделей. Между тем переходные процессы могут существенно влиять на характеристики системы через действительные средние значения вероятностей состояний [5], а вероятности (интенсивности) переходов в общем случае изменяются во времени, в том числе скачкообразно.

Подробный обзор работ по переходным режимам и поведению систем с кусочно-постоянными изменениями интенсивностей переходов выполнен в статье [6]. В ней отмечено, что одно из первых исследований переходного режима было представлено в работе Харрисона [7] в 1981 г. Затем проблема достаточно долго не рассматривалась и вновь стала актуальной в связи с увеличением сетевого трафика и появлением так называемых катастроф [8–10]. В этих же работах указывается, что изучение МП с зависимыми от времени интенсивностями переходов началось с работ Кларка [11, 12]. Дальнейшее развитие соответствующей проблематики рассмотрено в публикациях [6, 13–17].

Следует отметить, что все перечисленные работы посвящены системам с непрерывным временем, и марковские цепи (МЦ) в них не рассматриваются.

Постановка задачи. В качестве МЦ в настоящей статье рассматривается счетная неоднородная цепь из n состояний, математическое описание которой представлено нестационарной матрицей переходных вероятностей (МПВ) с кусочно-постоянными изменениями элементов на каком-либо шаге тактового времени и вектором начального распределения вероятностей (ВНРВ):

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} p_{11.K} & p_{12.K} & \dots & p_{1n.K} \\ p_{21.K} & p_{22.K} & \dots & p_{2n.K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1.K} & p_{n2.K} & \dots & p_{nn.K} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times n}, \mathbf{P}(0) = [P_1(0) \ P_2(0) \ \dots \ P_n(0)]^T \in \mathfrak{R}^n, \quad (1)$$

где $K = \text{var}$ — символическое обозначение очередного такта, на котором происходит скачок переходных вероятностей $p_{\alpha\beta.K}$ $\alpha = 1, \dots, n$, $\beta = 1, \dots, n$; T — символ транспонирования.

На практике допускается достаточно общий вариант, когда спектр матрицы \mathbf{P}_K составляют некрратные вещественные и комплексно-сопряженные собственные значения.

Динамика неоднородной МЦ с тактовым временем k описывается векторно-матричным рекуррентным уравнением [1–4]:

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_K^T \mathbf{P}_k = [\mathbf{P}_K^T]^k \mathbf{P}_0, \quad (2)$$

где \mathbf{P}_k и \mathbf{P}_{k+1} — векторы вероятностей состояний на k и $k + 1$ шаге (в моменты тактового времени k и $k + 1$), \mathbf{P}_K^T — транспонированная МПВ.

Алгоритмы (2) по сути не отличаются от аналогичных алгоритмов рекуррентного построения решения в однородных МЦ. При этом на очередном шаге $K = \text{var}$ для дальнейших матричных операций используется соответствующая матрица \mathbf{P}_K . При увеличении ее порядка (т.е. числа состояний МЦ), количества тактов функционирования k , а также при необходимости учета влияния переходных режимов интерпретация результатов становится все более затруднительной и не наглядной.

В этой связи актуальна задача обобщения основных результатов [5] в части выборочного поиска передаточных функций и выражений для вероятностей состояний на неоднородные МЦ с кусочно-постоянными изменениями переходных вероятностей, что позволяло бы получать функции вероятностей состояний в „замкнутой“ аналитической форме, наглядно отображать поведение систем графически и находить средние значения вероятностей на заданном интервале функционирования в тактовом времени. Вспомогательной задачей выступает обоснование процедур получения оценок для границ наступления установившегося режима с учетом скачков переходных вероятностей. Разработка соответствующего аналитического подхода составляет основное содержание настоящей статьи.

Иллюстрация недостоверности стационарных оценок вероятностей состояний. Скачки переходных вероятностей обуславливают необходимость исследования не только стационарных, но и переходных режимов. Отсутствие учета переходной динамики может весьма критично сказаться на общем и детальном восприятии свойств системы. Рассмотрим простейшую стохастическую систему с графом состояний, изображенным на рис. 1.

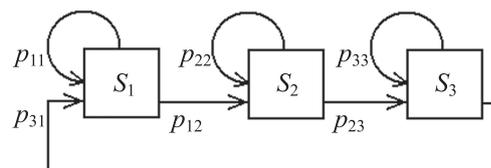


Рис. 1

Пусть имеется два варианта исходных данных МПВ:

$$1) \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0,9 & 0 & 0,1 \end{bmatrix};$$

$$2) \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}.$$

Ввиду равенства отдельных характеристик состояний между собой „внутри“ каждого варианта в силу эргодичности (независимо от значений компонентов вектора $\mathbf{P}(0) = [P_1(0) \ P_2(0) \ P_3(0)]^T$) для вектора установившегося решения имеет место результат

$$\mathbf{P}(k \rightarrow \infty) = [1/3 \ 1/3 \ 1/3]^T. \tag{3}$$

Насколько справедливо его использование, рассмотрим на примере поведения системы при изменении тактового времени от 0 до 40, если задан вектор начальных условий $\mathbf{P}(0) = [1 \ 0 \ 0]^T$.

Для поиска операторов „вход–выход“ в z -форме (z -передаточных функций) воспользуемся соотношениями [5]:

$$\Phi_{ii}(z) = \frac{P_i(z)}{P_i(0)} = \frac{\det(z\mathbf{E}_{n-1} - \mathbf{P}_{ii}^T)}{\det(z\mathbf{E}_n - \mathbf{P}^T)}, \quad \Phi_{ij}(z) = \frac{P_j(z)}{P_j(0)} = \frac{z\det(z\mathbf{E}_{n-1} - \mathbf{P}_{ii}^T) - \det(z\mathbf{E}_n - \mathbf{D}_{ij})}{\det(z\mathbf{E}_n - \mathbf{P}^T)}, \tag{4}$$

где $P_i(z)$ — i -й компонент вектора текущего распределения вероятностей (ВТРВ) в z -форме; $P_j(0)$ — j -й компонент ВНРВ; $\det(\dots)$ — характеристический определитель числовых матриц; \mathbf{E}_{n-1} — единичная $((n-1) \times (n-1))$ -матрица; \mathbf{P}_{ii}^T — матрица \mathbf{P}^T , уплотненная в результате удаления i -й строки и i -го столбца; \mathbf{D}_{ij} — матрица \mathbf{P}^T , в которой i -й столбец коэффициентов заменен на j -й столбец матрицы \mathbf{E}_n .

Для каждого варианта исходных данных требуется найти операторы от первого компонента ВНРВ к каждому из компонентов ВТРВ. В соответствии с выражениями (4) для первого варианта исходных данных МПВ получаем

$$\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0,9 \\ 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{11}^T = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0,9 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{22}^T = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{33}^T = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0,9 & 0,1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0,1 & 1 & 0,9 \\ 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{31} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 1 \\ 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее

$$\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{P}^T) = \det \begin{bmatrix} z - 0,1 & 0 & -0,9 \\ -0,9 & z - 0,1 & 0 \\ 0 & -0,9 & z - 0,1 \end{bmatrix} = z^3 - 0,3z^2 + 0,03z - 0,73,$$

$$\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{11}^T) = \det \begin{bmatrix} z - 0,1 & 0 \\ -0,9 & z - 0,1 \end{bmatrix} = z^2 - 0,2z + 0,01,$$

$$\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{22}^T) = \det \begin{bmatrix} z - 0,1 & -0,9 \\ 0 & z - 0,1 \end{bmatrix} = z^2 - 0,2z + 0,01,$$

$$\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{33}^T) = \det \begin{bmatrix} z - 0,1 & 0 \\ -0,9 & z - 0,1 \end{bmatrix} = z^2 - 0,2z + 0,01,$$

$$\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{21}) = \det \begin{bmatrix} z - 0,1 & -1 & -0,9 \\ -0,9 & z & 0 \\ 0 & 0 & z - 0,1 \end{bmatrix} = z^3 - 0,2z^2 - 0,89z + 0,09,$$

$$\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{31}) = \det \begin{bmatrix} z - 0,1 & 0 & -1 \\ -0,9 & z - 0,1 & 0 \\ 0 & -0,9 & z \end{bmatrix} = z^3 - 0,2z^2 + 0,01z - 0,81,$$

$$\Phi_{11}(z) = \frac{P_1(z)}{P_1(0)} = \frac{\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{11}^T)}{\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{P}^T)} = \frac{z^2 - 0,2z + 0,01}{z^3 - 0,3z^2 + 0,03z - 0,73}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{21}(z) &= \frac{P_2(z)}{P_1(0)} = \frac{z\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{22}^T) - \det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{21})}{\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{P}^T)} = \frac{z(z^2 - 0,2z + 0,01) - (z^3 - 0,2z^2 - 0,89z + 0,09)}{z^3 - 0,3z^2 + 0,03z - 0,73} = \\ &= \frac{0,9z - 0,09}{z^3 - 0,3z^2 + 0,03z - 0,73} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{31}(z) &= \frac{P_3(z)}{P_1(0)} = \frac{z\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{33}^T) - \det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{31})}{\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{P}^T)} = \frac{z(z^2 - 0,2z + 0,01) - (z^3 - 0,2z^2 + 0,01z - 0,81)}{z^3 - 0,3z^2 + 0,03z - 0,73} = \\ &= \frac{0,81}{z^3 - 0,3z^2 + 0,03z - 0,73} \end{aligned}$$

Матрица \mathbf{P}^T имеет собственные значения $z_1 = 1$, $z_{2,3} = \lambda \pm j\omega = -0,35 \pm j0,779$. Таким образом, общий знаменатель всех полученных z -операторов представляется в виде

$$\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{P}^T) = (z - z_1)(z_2 - 2\lambda z + \lambda^2 + \omega^2) = (z - 1)(z^2 + 0,7z + 0,73).$$

Паре комплексно-сопряженных корней $z_{2,3}$ соответствуют общие для всех функций вероятностей базовые параметры [5]:

$$d = \sqrt{\lambda^2 + \omega^2} = 0,854; \varphi_0 = \pi - \arctg\left(\left|\frac{\omega}{\lambda}\right|\right) = 1,993; \varphi = \arctg\left(\left|\frac{\omega}{\lambda - 1}\right|\right) = 0,524.$$

Далее согласно [5]:

$$1) \text{ для оператора } \Phi_{11}(z) = \frac{z^2 - 0,2z + 0,01}{z^3 - 0,3z^2 + 0,03z - 0,73} = \frac{z^2 - 0,2z + 0,01}{(z - 1)(z^2 + 0,7z + 0,73)} \text{ имеем}$$

$$C_{1.11}(k) = \left[\frac{z^2 - 0,2z + 0,01}{z^2 + 0,7z + 0,73} \right]_{z=z_1=1} z_1^k = c_{1.11} \cdot z_1^k = 0,333 \cdot 1^k = 0,333,$$

$$\Phi_{y.11}(z) = \Phi_{11}(z)(z - z_2)(z - z_3)(z - 1) = z^2 - 0,2z + 0,01,$$

$$\Phi_{y.11}(\lambda + j\omega) = \Phi_{y.11}(z) \Big|_{z=\lambda + j\omega} = -0,405 - j0,701,$$

$$d_{11} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{|\Phi_{y,11}(\lambda + j\omega)|}{\sqrt{(1-\lambda)^2 + \omega^2}} = 0,667, \Delta\varphi_{11} = \arg[\Phi_{y,11}(\lambda + j\omega)] = -2,094, \varphi_{11} = \varphi + \Delta\varphi_{11} = -1,571,$$

$$P_1(k) = C_{1,11}(k) - d_{11}d^k \sin(\varphi_0 k + \varphi_{11}) = 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(1,993k - 1,571);$$

2) для оператора $\Phi_{21}(z) = \frac{0,9z - 0,09}{z^3 - 0,3z^2 + 0,03z - 0,73} = \frac{0,9z - 0,09}{(z-1)(z^2 + 0,7z + 0,73)}$ имеем

$$C_{1,21}(k) = \left[\frac{0,9z - 0,09}{z^2 + 0,7z + 0,73} \Big|_{z=z_1=1} \right] z_1^k = c_{1,21} \cdot z_1^k = 0,333 \cdot 1^k = 0,333,$$

$$\Phi_{y,21}(z) = \Phi_{21}(z)(z - z_2)(z - z_3)(z - 1) = 0,9z - 0,09,$$

$$\Phi_{y,21}(\lambda + j\omega) = \Phi_{y,21}(z) \Big|_{z=\lambda + j\omega} = -0,405 + j0,701,$$

$$d_{21} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{|\Phi_{y,21}(\lambda + j\omega)|}{\sqrt{(1-\lambda)^2 + \omega^2}} = 0,667, \Delta\varphi_{21} = \arg[\Phi_{y,21}(\lambda + j\omega)] = 2,094, \varphi_{21} = \varphi + \Delta\varphi_{21} = 2,618,$$

$$P_2(k) = C_{1,21}(k) - d_{21}d^k \sin(\varphi_0 k + \varphi_{21}) = 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(1,993k + 2,618);$$

3) для оператора $\Phi_{31}(z) = \frac{0,81}{z^3 - 0,3z^2 + 0,03z - 0,73} = \frac{0,81}{(z-1)(z^2 + 0,7z + 0,73)}$ имеем

$$C_{1,31}(k) = \left[\frac{0,81}{z^2 + 0,7z + 0,73} \Big|_{z=z_1=1} \right] z_1^k = c_{1,31} \cdot z_1^k = 0,333 \cdot 1^k = 0,333,$$

$$\Phi_{y,31}(z) = \Phi_{31}(z)(z - z_2)(z - z_3)(z - 1) = 0,81, \Phi_{y,31}(\lambda + j\omega) = \Phi_{y,31}(z) \Big|_{z=\lambda + j\omega} = 0,81,$$

$$d_{31} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{|\Phi_{y,31}(\lambda + j\omega)|}{\sqrt{(1-\lambda)^2 + \omega^2}} = 0,667, \Delta\varphi_{31} = \arg[\Phi_{y,31}(\lambda + j\omega)] = 0, \varphi_{31} = \varphi + \Delta\varphi_{31} = 0,524,$$

$$P_3(k) = C_{1,31}(k) - d_{31}d^k \sin(\varphi_0 k + \varphi_{31}) = 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(1,993k + 0,524).$$

При втором варианте исходных данных, пользуясь результатами [5], по аналогии получаем для функций вероятностей состояний следующие соотношения (для различения в индексы вероятностей добавляется символ „*“):

$$P_1^*(k) = 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(0,102k - 1,571), P_2^*(k) = 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(0,102k + 2,618),$$

$$P_3^*(k) = 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(0,102k + 0,524).$$

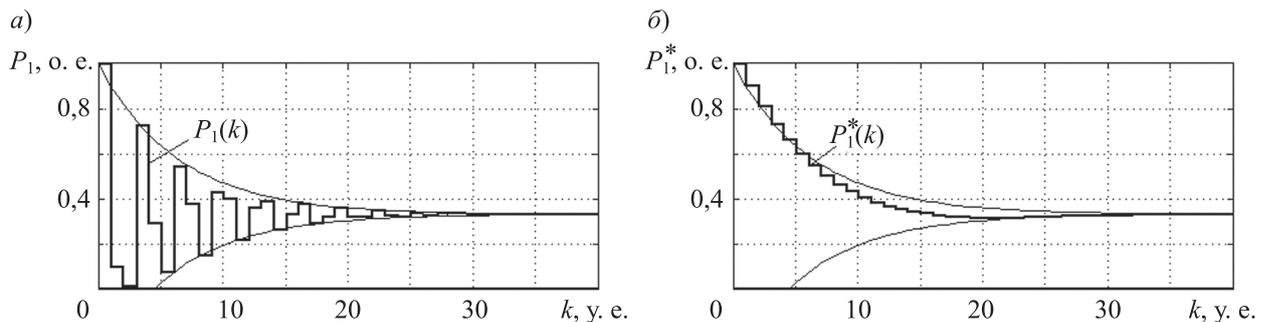


Рис. 2

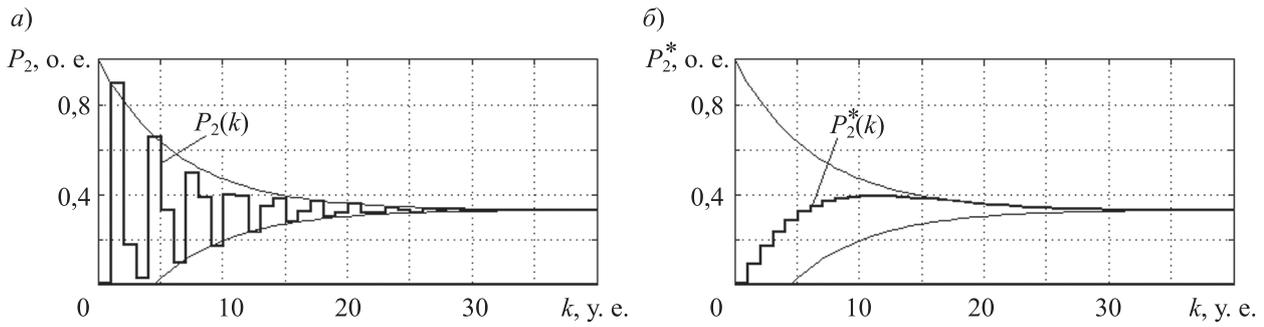


Рис. 3

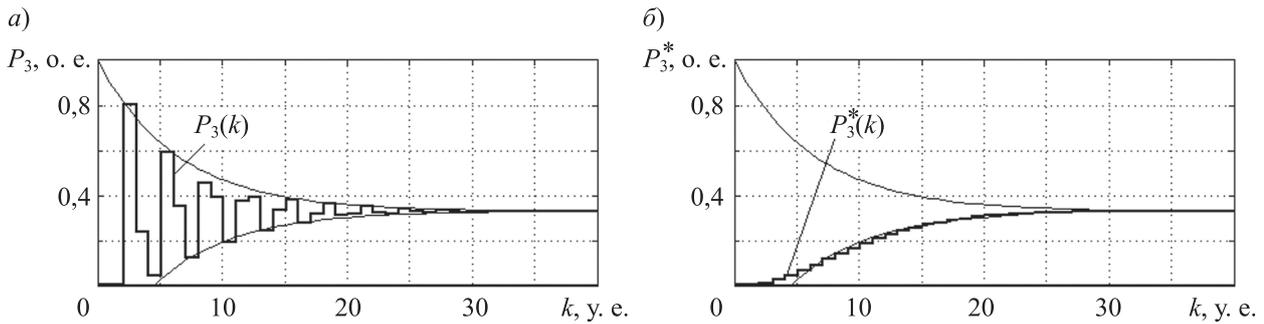


Рис. 4

Сравнительный анализ приведенных функций для первого и второго варианта исходных данных МПВ показывает, что единственное различие одноименных вероятностей заключается в значении параметра φ_0 . Для комплексно-сопряженной пары собственных значений МПВ второго варианта $z_{2,3}^* = \lambda^* \pm j\omega^* = 0,85 \pm j0,087$ справедлив результат $\varphi_0 = \text{arctg}(|\omega/\lambda|) = 0,102$ [5]. Однако это приводит к различающемуся поведению одноименных функций вероятностей, что видно из попарного сравнения графиков (см. рис. 2–4). Здесь функции вероятностей состояний представлены с экстраполяцией значений на длину такта. Тонкими линиями на графиках показаны верхняя $P_+(k) = 0,333 + 0,667 \cdot 0,854^k$ и нижняя $P_-(k) = 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k$ огибающие, которые идентичны для всех функций вероятностей.

Соответственно все функции вероятностей имеют одно и то же время установления стационарного режима [5]:

$$\tilde{k} = \frac{\ln(0,05) + \ln(0,333) - \ln(0,667)}{\ln(0,854)} = 23,443 \rightarrow 24.$$

В то же время очевидно, что некорректно описанные варианты отождествлять по одинаковым установившимся значениям вероятностей и единому тактовому времени наступления стационарного режима. В частности, „биения“ вероятностей при изменении тактового времени в первом варианте обуславливают очень осторожное прогнозирование свойств МЦ в переходной динамике, так как на каком-либо шаге можно получить значительное несоответствие ожидаемых и реальных характеристик, хотя средние значения вероятностей на интервале функционирования достаточно близки к стационарным.

Для второго варианта на интервале $k = 0-40$ среднее значение вероятности первого, например, состояния $\bar{P}_1(0-40) = \left[\sum_{k=0}^{40} P_1(k) \right] / 41 = 0,415$ оказывается почти на 24,6 % больше стационарного. Понятно, что при уменьшении интервала функционирования ситуация усугубляется: при $k = 0-10$ среднее значение той же вероятности $\bar{P}_1(0-10) = \left[\sum_{k=0}^{10} P_1(k) \right] / 11 = 0,641$ оказывается больше стационарного уже на 92,5 %.

Также ясно, что при исследовании неоднородной МЦ со скачками вероятностей переходов от первого варианта ко второму и наоборот возникающие стационарные режимы не будут отражать истинную картину поведения системы.

Исследование неоднородных МЦ с кусочно-постоянными переходными вероятностями. Поведение неоднородной МЦ при скачках переходных вероятностей схематично отображается на рис. 5.

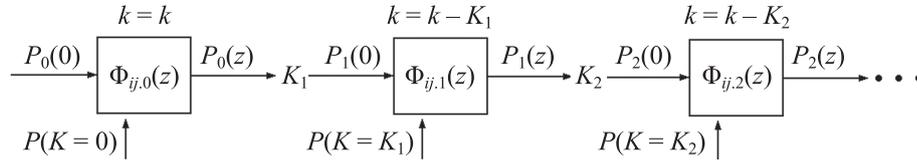


Рис. 5

С начала функционирования МЦ каждому соответствующему интервалу тактового времени сопоставляется „собственная“ МПВ и, как следствие, своя матрица передаточных функций. При скачке в момент тактового времени $k = K_1$ из мгновенных значений функций вероятностей составляется новый вектор начального распределения. Находятся новые необходимые для вычислений z -передаточные функции, определяются текущие функции вероятностей состояний. В очередной момент скачка тактового времени $k = K_2$ процесс повторяется и т. д. При сопряжении функций вероятностей и при получении оценок для границ наступления установившегося режима учитывается смещение временного аргумента. Выходной вектор вероятностей очередного скачка является вектором начальных условий в момент тактового времени следующего скачка переходных вероятностей.

В качестве примера рассматривается неоднородная МЦ с интервалом функционирования от 0 до 30 тактов и кусочно-постоянными изменениями переходных вероятностей. Математическая модель МЦ задается в виде следующих структур МПВ и ВНРВ (соответствует графу на рис. 1):

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{10} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{20} = \begin{bmatrix} 0,92 & 0,08 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,92 & 0 & 0,08 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_0(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

При этом происходит два скачка переходных вероятностей на 10 и 20 тактах соответственно.

При $k = K_1 = 10$ с помощью полученных ранее функций вероятностей находятся „новые“ начальные условия и собственные значения МПВ

$$P_1^*(10) = 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(0,102k - 1,571)|_{k=10} = 0,406,$$

$$P_2^*(10) = 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(0,102k + 2,618)|_{k=10} = 0,399,$$

$$P_3^*(10) = 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(0,102k + 0,524)|_{k=10} = 0,195,$$

$$\mathbf{P}_1(0) = \mathbf{P}_0(10) = [0,406 \quad 0,399 \quad 0,195]^T,$$

$$\mathbf{P}_{10} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \end{bmatrix} \Rightarrow z_1 = 1, z_{2,3} = 0,1 \pm j0,48 = \lambda \pm j\omega.$$

Для упрощения записей вводится ранее использованное обозначение

$$\mathbf{P}^\Gamma = \mathbf{P}_{10}^T = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0,4 \\ 0,8 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,6 \end{bmatrix},$$

$$A(z) = \det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{P}^\Gamma) = (z - z_1)(z^2 - 2\lambda z + \lambda^2 + \omega^2) = (z - 1)(z^2 - 0,2z + 0,24),$$

далее формируются

$$\mathbf{P}_{11}^T = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 \\ 0,6 & 0,6 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{22}^T = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0 & 0,6 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{33}^T = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ 0,8 & 0,4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0,2 & 1 & 0,4 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{31} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 1 \\ 0,8 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 1 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,6 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{32} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,6 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 1 & 0,6 & 0,6 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{23} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0,4 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,6 \end{bmatrix},$$

$$\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{11}^T) = \det \begin{bmatrix} z - 0,4 & 0 \\ -0,6 & z - 0,6 \end{bmatrix} = z^2 - z + 0,24,$$

$$\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{22}^T) = \det \begin{bmatrix} z - 0,2 & -0,4 \\ 0 & z - 0,6 \end{bmatrix} = z^2 - 0,8z + 0,12,$$

$$\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{33}^T) = \det \begin{bmatrix} z - 0,2 & 0 \\ -0,8 & z - 0,4 \end{bmatrix} = z^2 - 0,6z + 0,08,$$

$$\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{21}) = \det \begin{bmatrix} z - 0,2 & -1 & -0,4 \\ -0,8 & z & 0 \\ 0 & 0 & z - 0,6 \end{bmatrix} = z^3 - 0,8z^2 - 0,68z + 0,48,$$

$$\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{31}) = \det \begin{bmatrix} z - 0,2 & -1 & -0,4 \\ -0,8 & z - 0,4 & 0 \\ 0 & -0,6 & z \end{bmatrix} = z^3 - 0,6z^2 + 0,08z - 0,48,$$

$$\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{12}) = \det \begin{bmatrix} z & 0 & -0,4 \\ -1 & z - 0,4 & 0 \\ 0 & -0,6 & z - 0,6 \end{bmatrix} = z^3 - z^2 + 0,24z - 0,24,$$

$$\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{32}) = \det \begin{bmatrix} z - 0,2 & 0 & 0 \\ -0,8 & z - 0,4 & -1 \\ 0 & -0,6 & z \end{bmatrix} = z^3 - 0,6z^2 - 0,52z + 0,12,$$

$$\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{13}) = \det \begin{bmatrix} z & 0 & -0,4 \\ 0 & z - 0,4 & 0 \\ -1 & -0,6 & z - 0,6 \end{bmatrix} = z^3 - z^2 - 0,16z + 0,16,$$

$$\det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{23}) = \det \begin{bmatrix} z - 0,2 & 0 & -0,4 \\ -0,8 & z & 0 \\ 0 & -1 & z - 0,6 \end{bmatrix} = z^3 - 0,8z^2 + 0,12z - 0,32.$$

Строится матрица передаточных функций (общий знаменатель для удобства записи выносятся)

$$B_{11}(z) = \det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{11}^T) = z^2 - z + 0,24,$$

$$B_{12}(z) = z\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{11}^T) - \det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{12}) = z(z^2 - z + 0,24) - (z^3 - z^2 + 0,24z - 0,24) = 0,24,$$

$$B_{13}(z) = z\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{11}^T) - \det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{13}) = z(z^2 - z + 0,24) - (z^3 - z^2 - 0,16z + 0,16) = 0,4z - 0,16,$$

$$B_{21}(z) = z\det(z\mathbf{E}_2 - \mathbf{P}_{22}^T) - \det(z\mathbf{E}_3 - \mathbf{D}_{21}) = z(z^2 - 0,8z + 0,12) - (z^3 - 0,8z^2 - 0,68z + 0,48) = 0,8z - 0,48,$$

$$\begin{aligned}
 B_{22}(z) &= \det(zE_2 - P_{22}^T) = z^2 - 0,8z + 0,12, \\
 B_{23}(z) &= z\det(zE_2 - P_{22}^T) - \det(zE_3 - D_{23}) = z(z^2 - 0,8z + 0,12) - (z^3 - 0,8z^2 + 0,12z - 0,32) = 0,32, \\
 B_{31}(z) &= z\det(zE_2 - P_{33}^T) - \det(zE_3 - D_{31}) = z(z^2 - 0,6z + 0,08) - (z^3 - 0,6z^2 + 0,08z - 0,48) = 0,48, \\
 B_{32}(z) &= z\det(zE_2 - P_{33}^T) - \det(zE_3 - D_{32}) = z(z^2 - 0,6z + 0,08) - (z^3 - 0,6z^2 - 0,52z + 0,12) = 0,6z - 0,12, \\
 B_{33}(z) &= \det(zE_2 - P_{33}^T) = z^2 - 0,6z + 0,08.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi(z) &= \frac{1}{A(z)} \begin{bmatrix} B_{11}(z) & B_{12}(z) & B_{13}(z) \\ B_{21}(z) & B_{22}(z) & B_{23}(z) \\ B_{31}(z) & B_{32}(z) & B_{33}(z) \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{(z-1)(z^2-0,2z+0,24)} \cdot \begin{bmatrix} z^2-z+0,24 & 0,24 & 0,4z-0,16 \\ 0,8z-0,48 & z^2-0,8z+0,12 & 0,32 \\ 0,48 & 0,6z-0,12 & z^2-0,6z+0,08 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Определяются эквивалентные z -операторы

$$\begin{aligned}
 \Phi_{1.1}(z) &= \frac{1}{A(z)} \sum_{n=1}^3 B_{1n}(z)P_{n.1}(0) = \frac{B_{11}(z)P_{1.1}(0) + B_{12}(z)P_{2.1}(0) + B_{13}(z)P_{3.1}(0)}{(z-1)(z^2-0,2z+0,24)} = \\
 &= \frac{(z^2-z+0,24) \cdot 0,406 + 0,24 \cdot 0,399 + (0,4z-0,16) \cdot 0,195}{(z-1)(z^2-0,2z+0,24)} = \frac{0,406z^2 - 0,328z + 0,162}{(z-1)(z^2-0,2z+0,24)}, \\
 \Phi_{2.1}(z) &= \frac{1}{A(z)} \sum_{n=1}^3 B_{2n}(z)P_{n.1}(0) = \frac{B_{21}(z)P_{1.1}(0) + B_{22}(z)P_{2.1}(0) + B_{23}(z)P_{3.1}(0)}{(z-1)(z^2-0,2z+0,24)} = \\
 &= \frac{(0,8z-0,48) \cdot 0,406 + (z^2-0,8z+0,12) \cdot 0,399 + 0,32 \cdot 0,195}{(z-1)(z^2-0,2z+0,24)} = \frac{0,399z^2 + 0,006z - 0,085}{(z-1)(z^2-0,2z+0,24)}, \\
 \Phi_{3.1}(z) &= \frac{1}{A(z)} \sum_{n=1}^3 B_{3n}(z)P_{n.1}(0) = \frac{B_{31}(z)P_{1.1}(0) + B_{32}(z)P_{2.1}(0) + B_{33}(z)P_{3.1}(0)}{(z-1)(z^2-0,2z+0,24)} = \\
 &= \frac{0,48 \cdot 0,406 + (0,6z-0,12) \cdot 0,399 + (z^2-0,6z+0,08) \cdot 0,195}{(z-1)(z^2-0,2z+0,24)} = \frac{0,195z^2 + 0,122z + 0,163}{(z-1)(z^2-0,2z+0,24)}.
 \end{aligned}$$

С использованием общих результатов [5] по полученным z -операторам $\Phi_{1.1}(z)$, $\Phi_{2.1}(z)$, $\Phi_{3.1}(z)$ находятся текущие выражения для функций вероятностей состояний

$$\begin{aligned}
 P_{1.1}(k) &= 0,231 - 0,255 \cdot 0,49^k \cdot \sin(1,776k - 0,757), \\
 P_{2.1}(k) &= 0,307 - 0,361 \cdot 0,49^k \cdot \sin(1,776k + 0,396), \\
 P_{3.1}(k) &= 0,462 - 0,313 \cdot 0,49^k \cdot \sin(1,776k + 1,019).
 \end{aligned}$$

При $k = K_1 = 20$

$$\begin{aligned}
 P_{1.1}(k - K_1) = P_{1.1}(10) = 0,231, \quad P_{2.1}(k - K_1) = P_{2.1}(10) = 0,307, \quad P_{3.1}(k - K_1) = P_{3.1}(10) = 0,462, \\
 P_2(0) = P_1(10) = [0,231 \quad 0,307 \quad 0,462]^T,
 \end{aligned}$$

$$P_{20} = \begin{bmatrix} 0,92 & 0,08 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,92 & 0 & 0,08 \end{bmatrix}, \quad P^T = P_{20}^T = \begin{bmatrix} 0,92 & 0 & 0,92 \\ 0,08 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,08 \end{bmatrix}, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = 0,428, \quad z_3 = 0,172,$$

$$A(z) = \det(zE_3 - P^T) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = (z - 1)(z - 0,428)(z - 0,172).$$

По аналогии с предыдущими расчетами находится очередная матрица передаточных функций и определяются эквивалентные по суммарному действию компонентов „нового“ вектора начальных условий z -операторы

$$\Phi(z) = \frac{1}{(z-1)(z-0,428)(z-0,172)} \cdot \begin{bmatrix} z^2 - 0,68z + 0,048 & 0,368 & 0,92z - 0,552 \\ 0,08z - 0,0064 & z^2 - z + 0,0736 & 0,0736 \\ 0,032 & 0,4z - 0,368 & z^2 - 1,52z + 0,552 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{1,2}(z) = \frac{0,231z^2 + 0,268z - 0,131}{(z-1)(z-0,428)(z-0,172)}, \quad \Phi_{2,2}(z) = \frac{0,307z^2 - 0,289z + 0,055}{(z-1)(z-0,428)(z-0,172)},$$

$$\Phi_{3,2}(z) = \frac{0,462z^2 - 0,579z + 0,149}{(z-1)(z-0,428)(z-0,172)}.$$

В итоге находятся аналитические выражения функций вероятностей после второго скачка

$$P_{1,2}(k) = 0,777 - 0,18 \cdot 0,428^k - 0,366 \cdot 0,172^k,$$

$$P_{2,2}(k) = 0,155 + 0,084 \cdot 0,428^k + 0,068 \cdot 0,172^k,$$

$$P_{3,2}(k) = 0,068 + 0,096 \cdot 0,428^k + 0,298 \cdot 0,172^k.$$

После сопряжения по участкам тактового времени имеют место следующие соотношения:

$$P_1(k) = \begin{cases} 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(0,102k - 1,571), & \forall 0 \leq k < 10; \\ 0,231 - 0,255 \cdot 0,49^{k-10} \sin[1,776(k-10) - 0,757], & 10 \leq k < 20; \\ 0,777 - 0,18 \cdot 0,428^{k-20} - 0,366 \cdot 0,172^{k-20}, & k \geq 20, \end{cases}$$

$$P_2(k) = \begin{cases} 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(0,102k + 2,618), & \forall 0 \leq k < 10; \\ 0,307 - 0,361 \cdot 0,49^{k-10} \sin[1,776(k-10) + 3,396], & 10 \leq k < 20; \\ 0,155 + 0,084 \cdot 0,428^{k-20} + 0,068 \cdot 0,172^{k-20}, & k \geq 20, \end{cases}$$

$$P_3(k) = \begin{cases} 0,333 - 0,667 \cdot 0,854^k \sin(0,102k + 0,524), & \forall 0 \leq k < 10; \\ 0,462 - 0,313 \cdot 0,49^{k-10} \sin[1,776(k-10) + 1,019], & 10 \leq k < 20; \\ 0,068 + 0,096 \cdot 0,428^{k-20} + 0,298 \cdot 0,172^{k-20}, & k \geq 20. \end{cases}$$

Графики огибающих найденных аналитических функций вероятностей состояний при кусочно-постоянном изменении переходных вероятностей представлены на рис. 6.

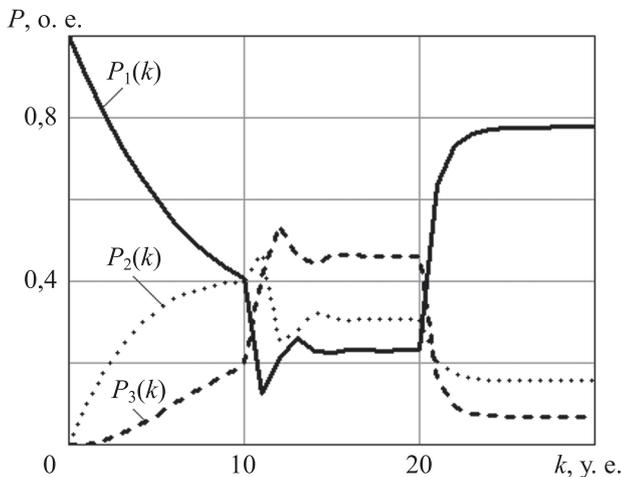


Рис. 6

При оценке границ наступления установленного режима для каждого значения вероятности следует учитывать смещение тактового времени. Для первого состояния при несмещенном тактовом времени функция вероятности состояния окончательно принимает вид

$$P_{1,2}(k) = 0,777 - 0,18 \cdot 0,428^k - 0,366 \cdot 0,172^k.$$

Согласно [5], для несмещенной оценки времени установления „снизу“ с использованием части функции с доминирующим корнем можно получить

$$k_1 = \frac{\ln(0,05) + \ln(0,777) - \ln(0,18)}{\ln(0,428)} = 1,805 \rightarrow 2.$$

Действительное время наступления стационарного режима для вероятности первого состояния рассчитывается с учетом смещения в 20 тактов

$$k_{1,20-} = k_{1-} + 20 = 22.$$

Для вероятности второго состояния несмещенное время установления „сверху“ при $P_{2,2}(k) \approx 0,155 + 0,084 \cdot 0,428^k$ с тем же доминирующим корнем составит

$$k_{2+} = \frac{\ln(0,05) + \ln(0,155) - \ln(0,084)}{\ln(0,428)} = 2,8 \rightarrow 3,$$

а с учетом смещения тактового времени

$$k_{2,20+} = k_{2+} + 20 = 23.$$

И, наконец, для вероятности третьего состояния при приближении $P_{3,2}(k) \approx 0,068 + 0,096 \cdot 0,428^k$ можно получить

$$k_{3+} = \frac{\ln(0,05) + \ln(0,068) - \ln(0,096)}{\ln(0,428)} = 3,946 \rightarrow 4, k_{3,20+} = k_{3+} + 20 = 24.$$

Полученные оценки времен установления хорошо согласуются с графиками функций вероятностей состояний на рис. 6.

Очевидно, что установившиеся значения вероятностей в виде

$$P(k \rightarrow \infty) = [0,777 \quad 0,155 \quad 0,068]^T.$$

существенно отличаются от их средних значений на всем интервале функционирования МЦ с учетом скачков переходных вероятностей

$$\bar{P}_1(0-30) = \frac{\sum_{k=0}^{30} P_1(k)}{31} = 0,542, \bar{P}_2(0-30) = \frac{\sum_{k=0}^{30} P_2(2k)}{31} = 0,254, \bar{P}_3(0-30) = \frac{\sum_{k=0}^{30} P_3(2k)}{31} = 0,204.$$

Заключение. Описанный подход позволяет исследовать неоднородные МЦ с кусочно-постоянными изменениями переходных вероятностей в строгой аналитической форме, он сохраняет все свойства основного подхода к выборочному поиску функций вероятностей состояний, изложенному в работе [5]. Наиболее просто процедуры реализуются для варианта некратных вещественных собственных значений МПВ. Однако наличие комплексно-сопряженных пар также не приводит к каким-либо существенным вычислительным затруднениям.

При этом обеспечиваются точность и наглядность представления соответствующих результатов, получение валидных оценок для времени установления стационарных режимов, определение „истинных“ средних значений вероятностей состояний на всем интервале развития системы с учетом скачков вероятностей. Таким образом, в целом значительно (а часто — принципиально несоизмеримо), по сравнению с результатами использования стационарных характеристик, повышается информативность представлений о реальном поведении МЦ.

Автор выражает признательность рецензенту за продуктивные замечания, способствовавшие улучшению содержания настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 485 с.
2. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. М.: КноРус, 2010. 190 с.
3. Нуммелин Э. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. М.: Мир, 1989. 208 с.
4. Фурман Я. А., Юрьев А. Н., Янин В. В. Цифровые методы обработки и распознавания бинарных изображений. Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1992. 245 с.

5. Земсков А. В. Аналитический подход к выборочному поиску функций вероятностей состояний в марковских цепях // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 12. С. 1035–1049. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-12-1035-1049.
6. Вытовтов К. А., Барабанова Е. А. Аналитический метод анализа неоднородных непрерывных марковских процессов с кусочно-постоянными интенсивностями перехода // Автоматика и телемеханика. 2021. № 12. С. 91–104. DOI: 10.31857/S0005231021120060.
7. Harrison P. G. Transient Behaviour of Queueing Networks // J. Appl. Prob. 1981. Vol. 18, N 2. P. 482–490.
8. Dudin A. N., Karolik A. V. BMAP/SM/1 Queue with Markovian Input of Disasters and Non-instantaneous Recovery // Performance Evaluat. 2001. Vol. 45, N 1. P. 19–32.
9. Dharmaraja S., Kumar R. Transient solution of a Markovian queueing model with heterogeneous servers and catastrophes // OPSEARCH. 2015. Vol. 52, N 4. P. 810–826.
10. Kumar B. Krishna, Madheshwari S. Pavai, Venkatakrishanan K. S. Transient solution of an M/M/2 queue with heterogeneous servers subject to catastrophes // Intern. J. Inform. Management Sci. 2017. Vol. 18, N 1. P. 63–80.
11. Clarke A. B. The time-dependent waiting line problem. Umv Michigan Rept. M720-1RS9. 1953.
12. Clarke A. B. On time-dependent waiting line processes // Ann. Math. Statist. 1953. Vol. 24. P. 491–492.
13. Коган Я. А., Литвин В. Г. К вычислению характеристик систем массового обслуживания с конечным буфером, работающей в случайной среде // Автоматика и телемеханика. 1976. № 12. С. 49–57.
14. Дудин А. Н. Об обслуживающей системе с переменным режимом работы // Автоматика и вычислительная техника. 1985. № 2. С. 27–29.
15. Головкин Н. И., Каретник В. О., Пелешок О. В. СМО с бесконечным накопителем и скачкообразной интенсивностью входного потока // Автоматика и вычислительная техника. 2009. № 10. С. 75–96.
16. Бондрова О. В., Крылова Д. С., Головкин Н. И., Жук Т. А. Вывод уравнений для систем массового обслуживания с бесконечным накопителем и скачкообразной интенсивностью входного потока // Вестник ВГУ: Серия: физика, математика. 2015. № 4. С. 89–100.
17. Миллер А. Б., Миллер Б. М., Степанян К. В. Одновременное импульсное и непрерывное управление марковской цепью в непрерывном времени // Автоматика и телемеханика. 2020. № 3. С. 114–131. DOI: 10.31857/S0005231020030071.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Алексей Викторович Земсков

— докт. техн. наук, профессор; Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, кафедра математического моделирования и прикладной информатики; профессор кафедры;
E-mail: aleksei.zemskov@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.01.2024; одобрена после рецензирования 30.04.2024; принята к публикации 19.06.2024.

REFERENCES

1. Tikhonov V.I., Mironov M.A. *Markovskiy protsessy* (Markov Processes), Moscow, 1977, 485 p. (in Russ.)
2. Ventzel E.S. *Issledovaniye operatsiy: zadachi, printsipy, metodologiya* (Operations Research: Objectives, Principles, Methodology), Moscow, 2010, 190 p. (in Russ.)
3. Nummelin E. *General Irreducible Markov Chains and Non-Negative Operators*, Cambridge etc., 1984, 156 p.
4. Furman Ya.A., Yuryev A.N., Yanshin V.V. *Tsifrovyye metody obrabotki i raspoznavaniya binarnykh izobrazheniy* (Digital Methods of Processing and Recognition of Binary Images), Krasnoyarsk, 1992, 245 p. (in Russ.)
5. Zemskov A.V. *Journal of Instrument Engineering*, 2023, no. 12(66), pp. 1035–1049, DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-12-1035-1049.
6. Vytovtov K.A. and Barabanova E.A. *Automation and Remote Control*, 2021, no. 12, pp. 2112–2124, DOI: 10.31857/S0005231021120060.
7. Harrison P.G. *J. Appl. Prob.*, 1981, no. 2(18), pp. 482–490.
8. Dudin A.N., Karolik A.V. *Performance Evaluat.*, 2001, no. 1(45), pp. 19–32.
9. Dharmaraja S., Rakesh Kumar, *OPSEARCH*, 2015, no. 4(52), pp. 810–826.
10. Kumar B. Krishna, Madheshwari S. Pavai, Venkatakrishanan K.S. *Int. J. Inform. Management Sci.*, 2017, no. 1(18), pp. 63–80.
11. Clarke A.B. *The time-dependent waiting line problem*, Umv Michigan Rept M720-1RS9, 1953.
12. Clarke A.B. *Ann. Math. Statist.*, 1953, vol. 24, pp. 491–492.
13. Kogan V.Ya., Menn A.A. *Automation and Remote Control*, 1976, no. 12, pp. 1908–1919.
14. Dudin A.N. *Automatic Control and Computer Sciences*, 1985, no. 2, pp. 27–29. (in Russ.)
15. Golovko N.I., Karetnik V.O., Peleshok O.V. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2009, no. 10, pp. 75–96. (in Russ.)

16. Bondrova O.V., Krylova D.S., Golovko N.I., Zhuk T.A. *Proceedings of Voronezh State University*. Series: Physics. Mathematics, 2015, no. 4, pp. 89–100. (in Russ.)
17. Miller A.B., Miller B.M., Stepanyan K.V. *Automation and Remote Control*, 2020, no. 3, pp. 469–482, DOI: 10.31857/S0005231020030071.

DATA ON AUTHOR**Alexey V. Zemskov**

—

Dr. Sci., Professor; Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Department of Mathematical Simulation and Applied Informatics; Professor; E-mail: aleksei.zemskov@yandex.ru

Received 25.01.2024; approved after reviewing 30.04.2024; accepted for publication 19.06.2024.

**МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ
С ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ****А. О. Овчаров*, А. А. Ведяков***Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия,*** ovcharov.alex.o@gmail.com*

Аннотация. Рассмотрена задача онлайн-оценивания параметров моделей линейной регрессии при наличии линейно зависимых элементов в регрессоре. Однако из-за линейной зависимости оценить все параметры не представляется возможным. Предложен метод, позволяющий оценить параметры, соответствующие линейно независимым элементам регрессора. Метод включает два этапа. На первом этапе выполняется преобразование исходной модели регрессии с неизвестным вектором параметров к модели с новым неизвестным вектором переменных. Таким образом, задача оценивания параметров приводится к задаче синтеза наблюдателя. На втором этапе синтезируется адаптивный наблюдатель нового вектора переменных, позволяющий одновременно оценить искомый вектор параметров.

Ключевые слова: оценивание параметров, линейная регрессия, линейная зависимость, сходимоссть, процедура динамического расширения регрессора, ортогонализация Грама–Шмидта

Ссылка для цитирования: Овчаров А. О., Ведяков А. А. Метод оценивания параметров линейных регрессионных моделей с линейно зависимыми элементами // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 8. С. 670–677. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-8-670-677.

**METHOD OF ESTIMATION OF PARAMETERS OF LINEAR REGRESSION MODEL
WITH LINEARLY DEPENDENT ELEMENTS****A. O. Ovcharov*, A. A. Vedyakov***ITMO University, St. Petersburg, Russia*** ovcharov.alex.o@gmail.com*

Abstract. The problem of online estimation of parameters of linear regression models in the presence of linearly dependent elements in the regressor is considered. To solve the problem, a method is proposed that allows estimating the parameters corresponding to independent elements of the regressor. The method includes two stages. At the first stage, the original regression model with unknown vector parameters is transformed into a model with a new unknown vector method. Thus, the problem of measuring parameters leads to the problem of synthesizing an observer. At the second stage, an adaptive observer of the new vector of variables is synthesized, which allows simultaneously estimating the desired vector of parameters.

Keywords: parameter estimation, linear regression, linear dependence, convergence, dynamic regressor extention, Gram-Schmidt orthogonalization

For citation: Ovcharov A. O., Vedyakov A. A. Method of estimation of parameters of linear regression model with linearly dependent elements. *Journal of Instrument Engineering*. 2024. Vol. 67, N 8. P. 670–677 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-8-670-677.

Введение. Большинство современных алгоритмов управления основано на математической модели, использующей параметры и сигналы объектов. Некоторые из этих величин не могут быть измерены напрямую, или их измерение может быть затруднено (пример: моменты инерции звеньев манипулятора или магнитный поток в электродвигателе).

Линейная регрессионная модель (ЛРМ) [1] играет важную роль в задачах идентификации и используется во многих методах онлайн- и офлайн-оценивания. В настоящей работе рассматриваются преимущественно методы онлайн-оценивания. Сходимость оценок неизвестных параметров к действительным значениям гарантируется при соблюдении специальных усло-

вий, накладываемых на регрессор. Для экспоненциальной сходимости градиентного метода оценивания параметров требуется выполнение условия не исчезающего возбуждения (НВ) [2], которое не всегда возможно обеспечить на практике [3, 4]. Чтобы преодолеть эту проблему, некоторые исследователи находят необходимые и достаточные условия для различных типов сходимости. Лоран Прали описывает достаточные условия для асимптотической сходимости [5]; необходимое и достаточное условие для глобальной асимптотической сходимости найдено Барабановым и др. [6]. Расширенный анализ данных работ при наличии помех в измерениях представлен в исследованиях Ефимова, Барабанова и др. [7, 8].

Использование других подходов позволяет преобразовать исходную регрессионную модель и получить новое условие сходимости с другими свойствами. Например, метод динамического расширения регрессоров и оценки смешивания (ДРСР) [3] преобразует исходную ЛРМ в набор скалярных регрессий. Метод обеспечивает асимптотическую сходимость, если новый скалярный регрессор не является квадратично интегрируемым, более того, нет прямой связи между этим условием и НВ [3].

В некоторых работах условия возбуждения ослабляются до условий интервального, или начального, возбуждения (ИВ) за счет внутреннего хранения результатов предыдущих измерений. Например, в статье [9] предложены дополнительные преобразования для скалярных моделей ДРСР, при этом интегратор и блок задержки используются для хранения прошлых измерений в регрессоре. Это позволяет ослабить условие квадратичной неинтегрируемости до ИВ.

Метод одновременного обучения, предложенный в работе Чаудхари и Джонсона [10] и доработанный в статьях Чаудхари и др. [11, 12] и Камалапуркар и др. [13], позволяет хранить данные в матрице наблюдений. Алгоритм выбора сохраняет такие значения измерений, которые максимизируют минимальное сингулярное число матрицы наблюдений. Затем параметры модели оцениваются градиентным методом с использованием полученного набора данных и текущих измерений. Метод гарантирует экспоненциальную сходимость ошибки оценки к нулю для матрицы наблюдений полного ранга, которая может быть построена по данным за конечный интервал времени.

Группа методов композитного обучения, предложенных в работе Пана и др. [14–16], сохраняет данные измерения не в матрице наблюдений, а с помощью интеграторов. Одним из параметров интегратора является размер окна интегрирования, который в некоторых случаях сложно выбрать. Для экспоненциальной сходимости ошибки оценивания к нулю условие НВ ослаблено до ИВ.

Подход Басу Роя и др. [17, 18] также обеспечивает экспоненциальную сходимость при выполнении условия ИВ, он не требует предварительного измерения выбора окна интегрирования, поскольку методы проверяют определитель матрицы. Подробное сравнение параллельного и комбинированного обучения представлено в статье [18].

Другой способ ослабить условие возбуждения — использовать модифицированный алгоритм оценивания. В работах Герасимова и др. [19], Ортеги и др. [20] представлены каскадные методы оценивания параметров за конечное время. Эти методы также основаны на ДРСР и обеспечивают сходимость за конечное время при выполнении условия ИВ. Принцип их работы основан на известном решении дифференциального уравнения динамики ошибки оценивания, благодаря чему удается предсказать значение, к которому сойдется оценка градиентного метода вместе с ДРСР. Робастные оценки на основе ДРСР со сходимостью за конечное время и ослабленным условием возбуждения представлены Ефимовым и др. в статье [21].

Настоящая работа является логическим продолжением статьи [22], в ней представлен метод оценивания параметров ЛРМ при наличии линейно зависимых элементов в регрессоре, т. е. когда не выполняется условие интервального возбуждения. Предложенный метод обеспечивает приведение задачи оценивания параметров к задаче синтеза наблюдателя для нового вектора неизвестных и на этой основе из оценки наблюдателя восстановление неизвестных параметров.

Метод оценивания параметров. Рассмотрим линейную регрессионную модель с регрессором $\omega(t) \in \mathbb{R}^n$, соответствующим вектором параметров $\theta \in \mathbb{R}^n$ и скалярным выходом $y(t) \in \mathbb{R}$, с линейно зависимыми элементами $\omega_i(t)$ в регрессоре:

$$y(t) = \omega(t)^T \theta, \quad (1)$$

здесь сигналы $y(t)$ и $\omega(t)$ — измеряемые величины, θ — вектор неизвестных параметров.

Для представленной модели необходимо синтезировать метод оценивания, обеспечивающий сходимость к нулю ошибки оценивания параметров, соответствующих линейно независимым элементам регрессора:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_j = 0, \quad (2)$$

где ошибка оценивания определяется как разница между истинным значением параметра и его оценкой $\tilde{\theta}_j = \theta_j - \hat{\theta}_j(t)$. На скользющем временном интервале регрессор $\omega(t)$ должен удовлетворять условию полунеисчезающего возбуждения (semi-PE) [23]:

$$\int_t^{t+T} \omega(s) \omega(s)^T ds \geq \beta \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $\beta > 0$, $T > 0$ — настраиваемые постоянные, E_m — единичная матрица размером m , причем $m < n$. Важно учесть и классические допущения, накладываемые на модель:

- 1) сигналы $y(t)$ и $\omega(t)$ ограничены;
- 2) вектор $\omega(t)$ тождественно не равен нулю.

Представим основные положения метода. Согласно условию полунеисчезающего возбуждения, в регрессоре могут присутствовать линейно зависимые элементы. Для определения порядковых индексов этих элементов выполняется динамическое расширение исходной модели (1), после чего к расширенному регрессору применяется ортогонализация Грама–Шмидта. Этот же процесс используется для получения новой модели с диагональной матрицей-регрессором. Здесь задача оценивания параметров θ формируется через задачу синтеза наблюдателя для нового неизвестного вектора $p(t)$. Для ее оценивания предложен адаптивный наблюдатель, позволяющий вместе с оценкой \hat{p} получить оценку параметров $\hat{\theta}$. Для улучшения восприятия и простоты изложения переменная времени t далее опускается.

На первом шаге выполняется расширение исходной модели (1) с помощью линейного стационарного фильтра $\mathcal{H}\{\cdot\}$, который выражается системой:

$$\dot{x} = \text{diag}\{\alpha\}x + \alpha(\cdot), \quad (4)$$

здесь настраиваемые параметры $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}^n$. К левой и правой части модели (1) применяется фильтр $\mathcal{H}\{\cdot\}$, в результате получается расширенная система:

$$z = \Phi \theta \quad (5)$$

с расширенным регрессором $\Phi = \mathcal{H}\{\omega^T\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и вектором $z = \mathcal{H}\{y\} \in \mathbb{R}^n$.

На втором шаге выполняется преобразование расширенной модели (5) и задачи оценивания параметров к синтезу наблюдателя. С помощью ортогонализации Грама–Шмидта расширенный регрессор можно представить в виде $\Phi = QK$, отсюда и всю модель (5) привести к виду:

$$\xi = \Lambda K \theta, \quad (6)$$

где новые элементы определяются как $\xi = Q^T z$ и диагональная матрица $\Lambda = Q^T Q$.

Доказательство. Расширенная модель (5) рассматривается как линейная комбинация столбцов регрессора и параметров:

$$z = \Phi\theta = \varphi_1\theta_1 + \varphi_2\theta_2 + \dots + \varphi_n\theta_n. \quad (7)$$

Отсюда с помощью ортогонализации Грама–Шмидта вычисляются значения столбцов ортогональной матрицы Q и коэффициенты k_{ij} :

$$\begin{aligned} q_1 &= \varphi_1, \\ q_2 &= \varphi_2 - k_{12}q_1, \\ q_3 &= \varphi_3 - k_{13}q_1 - k_{23}q_2, \\ q_j &= \varphi_j - \sum_{i=1}^{j-1} k_{ij}q_i, \end{aligned} \quad (8)$$

здесь $k_{ij} = q_i^T \varphi_j / (q_i^T q_i)$. Выразив векторы φ_j из предыдущих уравнений через q_i и k_{ij} , линейную комбинацию (7) можно переписать относительно векторов q_i :

$$\begin{aligned} \varphi_1\theta_1 + \varphi_2\theta_2 + \sum_{j=3}^n \varphi_j\theta_j &= q_1\theta_1 + (q_2 + k_{12}q_1)\theta_2 + \sum_{j=3}^n \left(q_j + \sum_{i=1}^{j-1} k_{ij}q_i \right) \theta_j = \\ &= q_1 \left(\theta_1 + k_{12}\theta_2 + \sum_{j=3}^n k_{1j}\theta_j \right) + q_2 \left(\theta_2 + \sum_{j=3}^n k_{2j}\theta_j \right) + \sum_{j=3}^n q_i \left(\theta_i + \sum_{j=i+1}^n k_{ij}\theta_j \right), \end{aligned} \quad (9)$$

или в компактном виде:

$$\sum_{j=1}^n \varphi_j\theta_j = \sum_{j=1}^n \left(q_j + \sum_{i=1}^{j-1} k_{ij}q_i \right) \theta_j = \sum_{i=1}^n q_i \left(\theta_i + \sum_{j=i+1}^n k_{ij}\theta_j \right), \quad (10)$$

отсюда, в ходе матричных преобразований, можно получить новую форму:

$$\Phi = QK = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n] \begin{bmatrix} 1 & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & k_{2n} \\ & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Учитывая свойство ортогональности матрицы Q и домножив всю расширенную модель на матрицу Q^T , можно записать искомую форму новой модели:

$$Q^T z = Q^T Q K \theta, \quad (12)$$

где матрицы системы (6) определяются двумя уравнениями $\xi = Q^T z$ и $\Lambda = Q^T Q$.

Далее записывается модель (6) в удобной форме для синтеза наблюдателя и вводится новый неизвестный вектор $\rho(t)$:

$$\begin{aligned} \xi &= \Lambda\rho, \\ \rho &= K\theta. \end{aligned} \quad (13)$$

Затем формируется адаптивный наблюдатель в следующей форме::

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}} &= \dot{K}\hat{\theta} + \gamma_\rho \Lambda (\xi - \Lambda\hat{\rho}), \\ \hat{\theta} &= K^{-1}\hat{\rho}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\gamma_\rho > 0$ — настраиваемый коэффициент адаптации градиентного метода. Стоит отметить, что Λ — положительно полуопределенная симметричная матрица, поэтому транспонирование отсутствует, также K — всегда обратимая матрица.

Отдельно стоит рассмотреть вычисление производной матрицы \dot{K} . Из уравнения для динамического фильтра (4) следует измеримость производной расширенного регрессора $\dot{\Phi}$. Путем подстановки векторов производных из матрицы Φ в уравнения (8) получается искомая матрица \dot{K} .

Математическое моделирование. Выполнено моделирование предложенного метода на примере системы с тремя элементами в регрессоре, где третий линейно зависит от второго:

$$y = [\sin(\omega t) \quad \cos(\omega t) \quad 2\cos(\omega t)] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

При моделировании использовались параметры модели $\omega = 5$, $\theta = [5 \quad 3 \quad 13]^T$; коэффициент адаптации $\gamma_p = 10\,000$. Решение дифференциальных уравнений выполняется с помощью ode23t метода из Matlab. Для оценивания параметров установлены следующие значения фильтра расширенной модели $\alpha = [1 \quad 10 \quad 100]^T$.

На рис. 1–3 представлены результаты исследований: рис. 1 — процесс оценивания переменных ρ (a — оценка ρ , b — ошибка оценивания $\tilde{\rho}$); рис. 2 — процесс оценивания θ (a — оценка θ , b — ошибка оценивания $\tilde{\theta}$); рис. 3 — переходный процесс компонентов диагонали регрессора).

Как видно из рисунков, предложенный метод обеспечивает оценивание параметра, соответствующего линейно независимому элементу регрессора.

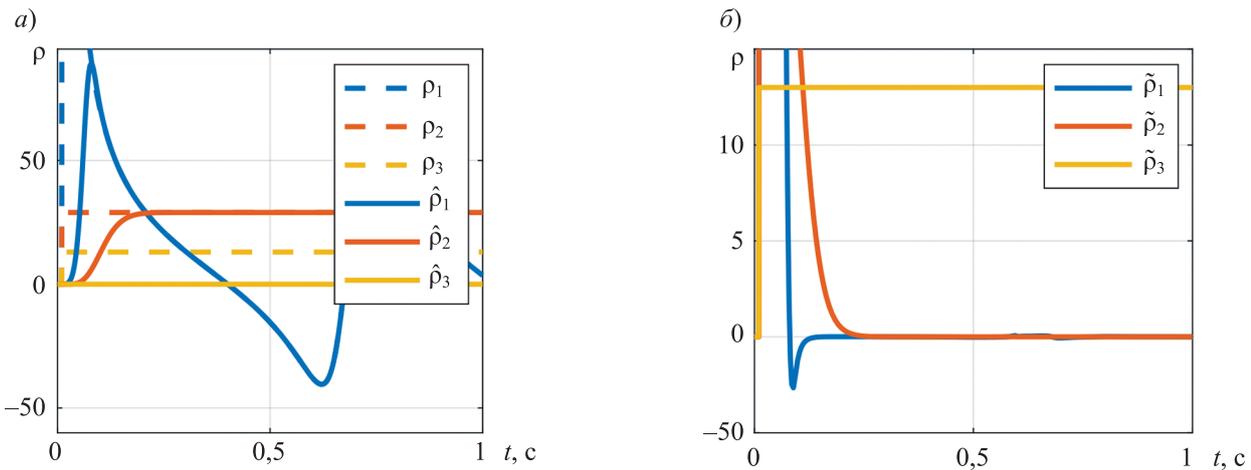


Рис. 1

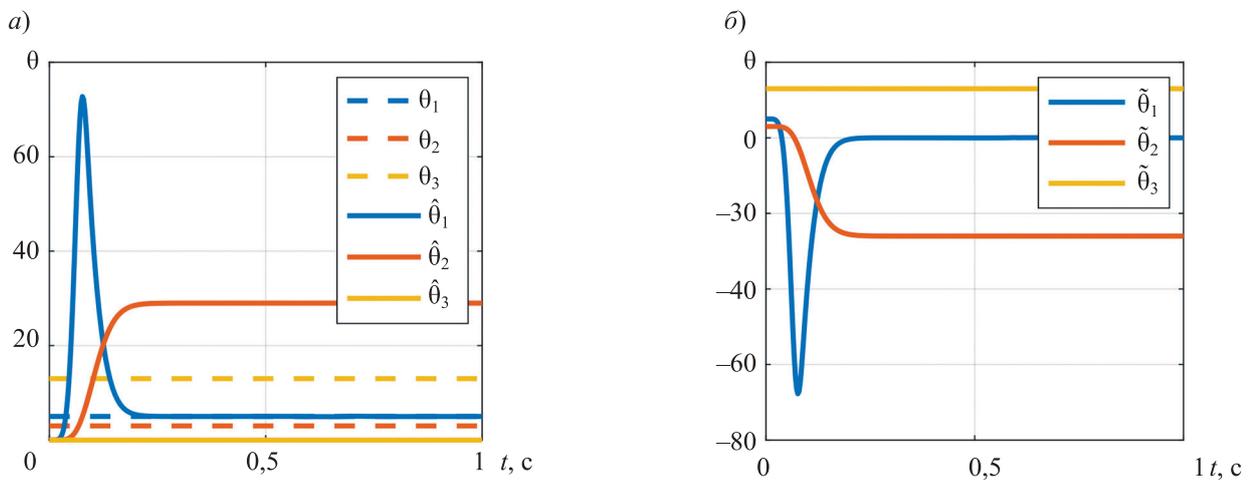


Рис. 2

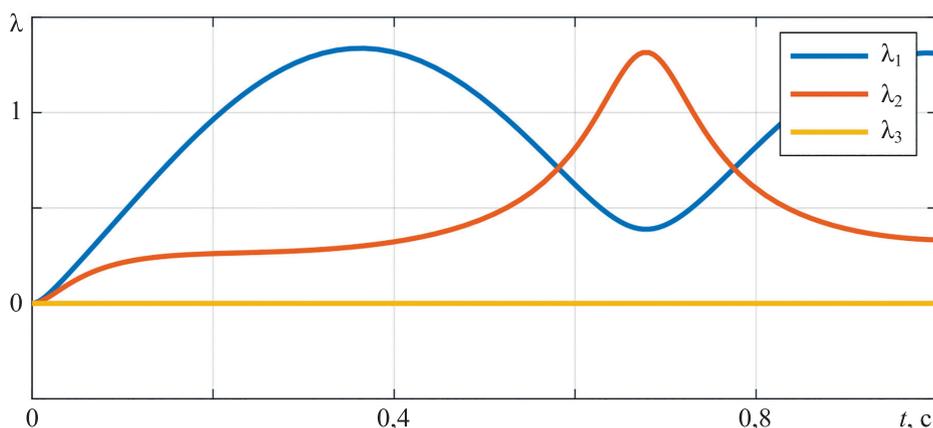


Рис. 3

Заключение. В статье предложен метод онлайн-оценивания параметров модели с линейно зависимыми компонентами в регрессоре. На первом этапе уравнение регрессии со скалярным выходом должно быть расширено, как это делается в методе DREM, чтобы получить матричный регрессор. Ортогонализация Грама–Шмидта используется для того, чтобы найти линейно зависимые столбцы в регрессоре и для декомпозиции расширенного регрессора на матрицу и ортогональную матрицу. В завершение получается новая модель, для которой задача оценивания параметров формируется как задача синтеза наблюдателя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Simpkins C.* System identification: Theory for the user, 2nd edition (Ljung, L.; 1999) [on the shelf] // *Robotics & Automation Magazine*. IEEE. 2012. Vol. 19. P. 95–96. DOI: 10.1109/MRA.2012.2192817.
2. *Ioannou P. and Sun J.* Robust adaptive control. Courier Corporation, 2012. 821 p.
3. *Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., and Pyrkin A.* Performance enhancement of parameter estimators via dynamic regressor extension and mixing // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2017. Vol. 62, N 7. P. 3546–3550.
4. *Aeyels D. and Sepulchre R.* On the convergence of a time-variant linear differential equation arising in identification // *Kybernetika*. 1994. Vol. 30, N 6. P. 715–723.
5. *Praly L.* Convergence of the gradient algorithm for linear regression models in the continuous and discrete time cases. PSL Research University, Mines ParisTech, Research Report, Feb. 2017 [Электронный ресурс]: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01423048>>.
6. *Barabanov N. and Ortega R.* On global asymptotic stability of $\dot{x} = -\phi(t)\phi^T(t)x$ with ϕ not persistently exciting // *Systems and Control Letters*. 2017. Vol. 109. P. 24–29. DOI: 10.1016/j.sysconle.2017.09.005.
7. *Efimov D., Barabanov N., and Ortega R.* Robust stability under relaxed persistent excitation conditions // 2018 IEEE Conf. on Decision and Control (CDC). IEEE. 2018. P. 7243–7248.
8. *Efimov D., Barabanov N., and Ortega R.* Robustness of linear time-varying systems with relaxed excitation // *Intern. J. of Adaptive Control and Signal Processing*. 2019. Vol. 33, N 12. P. 1885–1900. DOI: <https://doi.org/10.1002/acs.2997>.
9. *Vedyakov A. A., Vediakova A. O., Bobtsov A. A., and Pyrkin A. A.* Relaxation for online frequency estimator of bias-affected damped sinusoidal signals based on Dynamic Regressor Extension and Mixing // *Intern. J. of Adaptive Control and Signal Processing*. 2019. Vol. 33, N 12. P. 1857–1867. DOI: 10.1002/acs.3034.
10. *Chowdhary G. and Johnson E. N.* Concurrent learning for improved convergence in adaptive flight control // *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. 2010. N 4. P. 3674–3679. DOI: 10.2514/6.2010-7540.
11. *Chowdhary G., Yucelen T., Mühlegg M., and Johnson E. N.* Concurrent learning adaptive control of linear systems with exponentially convergent bounds // *Intern. J. of Adaptive Control and Signal Processing*. 2013. Vol. 27, N 4. P. 280–301. DOI: 10.1002/acs.2297.
12. *Chowdhary G., Mühlegg M., and Johnson E.* Exponential parameter and tracking error convergence guarantees for adaptive controllers without persistency of excitation // *Intern. J. of Control*. 2014. Vol. 87, N 8. P. 1583–1603. DOI: 10.1080/00207179.2014.880128.
13. *Kamalapurkar R., Reish B., Chowdhary G., and Dixon W. E.* Concurrent Learning for Parameter Estimation Using Dynamic State-Derivative Estimators // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2017. Vol. 62, N 7. P. 3594–3601. DOI: 10.1109/TAC.2017.2671343.

14. Pan Y., Pan L., and Yu H. Composite learning control with application to inverted pendulums // Proc. 2015 Chinese Automation Congress, CAC 2015. 2016. P. 232–236. DOI: 10.1109/CAC.2015.7382502.
15. Pan Y. and Yu H. Composite Learning from Adaptive Dynamic Surface Control // IEEE Transactions on Automatic Control. 2016. Vol. 61, N 9. P. 2603–2609. DOI: 10.1109/TAC.2015.2495232.
16. Pan Y., Sun T., Liu Y., and Yu H. Composite learning from adaptive backstepping neural network control // Neural Networks. 2017. Vol. 95. P. 134–142. DOI: 10.1016/j.neunet.2017.08.005.
17. Basu Roy S., Bhasin S., and Kar I. N. Combined MRAC for unknown MIMO LTI systems with parameter convergence // IEEE Transactions on Automatic Control. 2018. Vol. 63, N 1. P. 283–290. DOI: 10.1109/TAC.2017.2725955.
18. Basu Roy S., Bhasin S., and Kar I. N. Composite Adaptive Control of Uncertain Euler-Lagrange Systems with Parameter Convergence without PE Condition // Asian J. of Control. 2020. Vol. 22, N 1. P. 1–10. DOI: 10.1002/asjc.1877.
19. Gerasimov D., Ortega R., and Nikiforov V. Adaptive Control of Multivariable Systems with Reduced Knowledge of High Frequency Gain: Application of Dynamic Regressor Extension and Mixing Estimators // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, N 15. P. 886–890. DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.09.108.
20. Ortega R., Aranovskiy S., Pyrkin A. A., Astolfi A., and Bobtsov A. A. New Results on Parameter Estimation via Dynamic Regressor Extension and Mixing: Continuous and Discrete-time Cases. Aug. 2019 [Электронный ресурс]: <http://arxiv.org/abs/1908.05125>.
21. Wang J., Efimov D., and Bobtsov A. A. On robust parameter estimation in finite-time without persistence of excitation // IEEE Transactions on Automatic Control. 2020. Vol. 65, N 4. P. 1731–1738. DOI: 10.1109/TAC.2019.2932960.
22. Ovcharov A., Vedyakov A., Kazak S., and Pyrkin A. Overparameterized model parameter recovering with finite-time convergence // Intern. J. of Adaptive Control and Signal Processing. 2022. Vol. 36, N 6. P. 1305–1325. DOI: https://doi.org/10.1002/acs.3382.
23. Basu Roy S. and Bhasin S. Novel model reference adaptive control architecture using semi-initial excitation-based switched parameter estimator // Intern. J. of Adaptive Control and Signal Processing. 2019. Vol. 33, N 12. P. 1759–1774. DOI: https://doi.org/10.1002/acs.3046.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Алексей Олегович Овчаров

— аспирант; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; заведующий лабораторией; E-mail: ovcharov.alex.o@gmail.com

Алексей Алексеевич Ведяков

— канд. техн. наук, доцент; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; доцент; E-mail: vedyakov@gmail.com

Поступила в редакцию 11.04.2024; одобрена после рецензирования 18.04.2024; принята к публикации 19.06.2024.

REFERENCES

1. Simpkins C. *Robotics & Automation Magazine*, IEEE, 2012, vol. 19, pp. 95–96, DOI: 10.1109/MRA.2012.2192817.
2. Ioannou P. and Sun J. *Robust adaptive control*, Courier Corporation, 2012, 821 p.
3. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., and Pyrkin A. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, no. 7(62), pp. 3546–3550.
4. Aeyels D. and Sepulchre R. *Kybernetika*, 1994, no. 6(30), pp. 715–723.
5. Praly L. *Convergence of the gradient algorithm for linear regression models in the continuous and discrete time cases*, PSL Research University, Mines ParisTech, Research Report, Feb. 2017, https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01423048.
6. Barabanov N. and Ortega R. *Systems and Control Letters*, 2017, vol. 109, pp. 24–29, DOI: 10.1016/j.sysconle.2017.09.005.
7. Efimov D., Barabanov N., and Ortega R. *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, IEEE, 2018, pp. 7243–7248.
8. Efimov D., Barabanov N., and Ortega R. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2019, no. 12(33), pp. 1885–1900, DOI: https://doi.org/10.1002/acs.2997.
9. Vedyakov A.A., Vedyakova A.O., Bobtsov A.A., and Pyrkin A.A. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2019, no. 12(33), pp. 1857–1867, DOI: 10.1002/acs.3034.
10. Chowdhary G. and Johnson E.N. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2010, no. 4, pp. 3674–3679, DOI: 10.2514/6.2010-7540.
11. Chowdhary G., Yucelen T., Mühlegg M., and Johnson E.N. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2013, no. 4(27), pp. 280–301, DOI: 10.1002/acs.2297.
12. Chowdhary G., Mühlegg M., and Johnson E. *International Journal of Control*, 2014, no. 8(87), pp. 1583–1603, DOI: 10.1080/00207179.2014.880128.

13. Kamalapurkar R., Reish B., Chowdhary G., and Dixon W.E. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, no. 7(62), pp. 3594–3601, DOI: 10.1109/TAC.2017.2671343.
14. Pan Y., Pan L., and Yu H. *Proc. 2015 Chinese Automation Congress, CAC 2015, 2016*, pp. 232–236, DOI: 10.1109/CAC.2015.7382502.
15. Pan Y. and Yu H. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, no. 9(61) pp. 2603–2609, DOI: 10.1109/TAC.2015.2495232.
16. Pan Y., Sun T., Liu Y., and Yu H. *Neural Networks*, 2017, vol. 95, pp. 134–142, DOI: 10.1016/j.neunet.2017.08.005.
17. Basu Roy S., Bhasin S., Kar and I.N. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, no. 1(63), pp. 283–290, DOI: 10.1109/TAC.2017.2725955.
18. Basu Roy S., Bhasin S., and Kar I.N. *Asian Journal of Control*, 2020, no. 1(22), pp. 1–10, DOI: 10.1002/asjc.1877.
19. Gerasimov D., Ortega R., and Nikiforov V. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, no. 15(51), pp. 886–890, DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.09.108.
20. Ortega R., Aranovskiy S., Pyrkin A.A., Astolfi A., and Bobtsov A.A. <http://arxiv.org/abs/1908.05125>, Aug. 2019.
21. Wang J., Efimov D., and Bobtsov A.A. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, no. 4(65), pp. 1731–1738, DOI: 10.1109/TAC.2019.2932960.
22. Ovcharov A., Vedyakov A., Kazak S., and Pyrkin A. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2022, no. 6(36), pp. 1305–1325, DOI: <https://doi.org/10.1002/acs.3382>.
23. Basu Roy S. and Bhasin S. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2019, no. 12(33), pp. 1759–1774, DOI: <https://doi.org/10.1002/acs.3046>.

DATA ON AUTHORS

- Alexey O. Ovcharov** — Post-Graduate Student; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; Head of a Laboratory; E-mail: ovcharov.alex.o@gmail.com
- Alexey A. Vedyakov** — PhD, Associate Professor; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; Associate Professor; E-mail: vedyakov@gmail.com

Received 11.04.2024; approved after reviewing 18.04.2024; accepted for publication 19.06.2024.

ПРИБОРЫ НАВИГАЦИИ

NAVIGATIONAL INSTRUMENTS

УДК 531.383
DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-8-678-688

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЗИЦИОННОЙ КОРРЕКЦИИ С ПЕРЕКРЕСТНЫМИ СВЯЗЯМИ В БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ СИСТЕМЕ ОРИЕНТАЦИИ

В. В. Алешкин*, Р. А. Здражевский, Ю. М. Ефремов, С. А. Скибин

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Саратов, Россия

** aleshkinvv@yandex.ru*

Аннотация. Рассматриваются кватернионные уравнения работы автономной бесплатформенной системы ориентации (БИСО), состоящей из инерциального измерительного модуля (ИИМ) и бортового вычислителя. ИИМ содержит трехкомпонентный измеритель угловой скорости, датчик линейных ускорений и магнитометр. Целью работы является построение системы кинематических уравнений с асимптотически устойчивыми решениями, настроенной на период Шулера и фильтр нижних частот с заданной полосой пропускания. Этим достигаются компенсация погрешностей начальной выставки, невозмущаемость линейными ускорениями (баллистические погрешности), снижение уровня шума в оценках параметров ориентации по отношению к сигналам гироскопов, акселерометров и магнитометров и отсутствие накопления ошибок определения ориентации. Алгоритмы работы БИСО строятся на основе уравнений Пуассона в параметрах Родрига–Гамильтона с дополнительно введенными членами перекрестной позиционной коррекции, знаки которых задаются исходя из требования асимптотической устойчивости, а численные значения коэффициентов коррекции обеспечивают остальные свойства алгоритмов. Теоретически обоснован диапазон угловых скоростей объекта, при которых сохраняются свойства алгоритмов. Результаты работы подтверждены математическим моделированием работы ИИМ и БИСО и натурными испытаниями на автомобиле макета БИСО с микромеханическим ИИМ.

Ключевые слова: *бесплатформенная система ориентации, кватернионные кинематические уравнения, коррекция, устойчивость, период Шулера, фильтрация шумов, математическое моделирование, натурные испытания*

Ссылка для цитирования: *Алешкин В. В., Здражевский Р. А., Ефремов Ю. М., Скибин С. А. Применение позиционной коррекции с перекрестными связями в бесплатформенной системе ориентации // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 8. С. 678–688. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-8-678-688.*

APPLICATION OF CROSS-LINKED POSITIONAL CORRECTION IN A STRAPDOWN ORIENTATION SYSTEM

V. V. Aleshkin*, R. A. Zdrashevsky, Yu. M. Efremov, S. A. Skibin

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia

** aleshkinvv@yandex.ru*

Abstract. The quaternionic equations describing operation of strapdown inertial orientation system (BISO) consisting of an inertial measurement module (IMU) and an on-board computer, are considered. The IMU contains a three-component angular velocity meter, a linear acceleration sensor and a magnetometer. The aim of the work construction of a system of kinematic equations with asymptotically stable solutions configured for the Shuler period and a low-pass filter with a given bandwidth. This ensures compensation for errors in the initial exposure, tolerance to linear accelerations (ballistic errors), reduction of the noise level in the estimates of orientation parameters in relation to the signals of gyroscopes, accelerometers, and magnetometers and the absence of accumulation of orientation determination errors. The BISO algorithms are based on the Poisson equations in the Rodrigue-Hamilton parameters with additionally introduced terms of cross-positional correction, the signs of which are set based on the requirement of asymptotic stability, while the numerical values of the correction coefficients provide the remaining properties of the algorithms. The range of angular velocities of an object at which the properties of the algorithms are preserved is theoretically substantiated. The results

of the work are confirmed by mathematical modeling of the work of the IMU and BISO and full-scale tests of a BISO model with a micromechanical IMU on a vehicle.

Keywords: strapdown orientation system, quaternionic kinematic equations, correction, stability, Schuler period, noise filtering, mathematical modeling, field tests

For citation: Aleshkin V. V., Zdrashevsky R. A., Efremov Yu. M., Skibin S. A. Application of cross-linked positional correction in a strapdown orientation system. *Journal of Instrument Engineering*. 2024. Vol. 67, N 8. P. 678–688 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-8-678-688.

Введение. Бесплатформенная инерциальная система ориентации (БИСО) определяет параметры ориентации по информации инерциального измерительного модуля (ИИМ), содержащего трехкомпонентные измеритель угловой скорости (ТГИУС), измеритель кажущихся ускорений (ТИКУ) и магнитометр. Алгоритмы вычисления параметров ориентации строятся на основе кинематических уравнений в параметрах Родрига–Гамильтона (кватернионах), представляющих собой систему четырех линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Эти уравнения устойчивы неасимптотически, а при численном решении — неустойчивы [1–4]. В результате погрешности начальной выставки БИСО, дрейф и шумы в сигналах гироскопов приводят к нарастающим погрешностям определения углов ориентации объекта. В настоящей работе рассматривается вариант кватернионных уравнений корректируемой БИСО, снижающий эти погрешности и улучшающий соотношение сигнал/шум в вычисленных углах ориентации по отношению к выходным сигналам датчиков ИИМ.

Постановка задачи. Кинематические уравнения в параметрах Родрига–Гамильтона (кватернионах) имеют следующий вид [3, 4]:

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \Omega - \Omega_g \circ \Lambda, \tag{1}$$

где Λ — кватернион, определяющий переход из географической системы координат к связанной системе; Ω, Ω_g — гиперкомплексные отображения векторов абсолютной угловой скорости связанной и географической систем координат соответственно.

При численном решении (1) появляются вычислительные погрешности, связанные с уходом нормы кватерниона. Для автоматического исправления в уравнение (1) добавляется член коррекции нормы кватерниона:

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \Omega - \Omega_g \circ \Lambda + \Lambda(1 - \|\Lambda\|). \tag{2}$$

С целью сокращения вычислительных операций, связанных с произведением кватернионов, используют кватернионные матрицы размерности (4×4) и (4×1) :

$$\mathbf{M}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & -\lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix}; \mathbf{M}(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & & & \\ \omega_y & & [\omega] & \\ \omega_z & & & \end{bmatrix}; \tag{3}$$

$$\mathbf{M}(\omega_g) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{xg} & -\omega_{yg} & -\omega_{zg} \\ \omega_{xg} & & & \\ \omega_{yg} & & [\omega_g] & \\ \omega_{zg} & & & \end{bmatrix}; \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}; \omega = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}.$$

Матрицы $[\omega]$ и $[\omega_g]$ представляют собой векторное ядро $\mathbf{M}(\omega)$ и $\mathbf{M}(\omega_g)$ соответственно.

В кватернионной форме матрица перехода от географического сопровождающего трехгранника к связанному с объектом имеет вид:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2\lambda_1^2 + 2\lambda_0^2 - 1 & 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_0\lambda_3 & 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_0\lambda_2 \\ 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_0\lambda_3 & 2\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 - 1 & 2\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_0\lambda_1 \\ 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_0\lambda_2 & 2\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_0\lambda_1 & 2\lambda_0^2 + 2\lambda_3^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Углы курса ψ , крена γ и тангажа ϑ выражаются через параметры Родрига–Гамильтона следующим образом:

$$\vartheta = \arcsin(2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_0\lambda_3); \gamma = \arctg\left(-\frac{2\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_0\lambda_1}{2\lambda_2^2 + 2\lambda_0^2 - 1}\right); \psi = \arctg\left(-\frac{2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_0\lambda_2}{2\lambda_1^2 + 2\lambda_0^2 - 1}\right). \quad (4)$$

Неасимптотическая устойчивость уравнений (1) и (2) приводит к расходимости оценок параметров ориентации при решении их численными методами даже в случае точного измерения угловых скоростей. Погрешности и шумы в выходных сигналах гироскопов приводят к тому, что приемлемая точность определения параметров ориентации в автономном режиме обеспечивается в течение короткого промежутка времени [1, 3, 5, 6]. Для компенсации накапливающихся со временем погрешностей вычисления углов ориентации в уравнения (2) вводят корректирующие сигналы, сформированные на основе информации других навигационных датчиков, входящих в состав ИИМ.

В работе [7] предложены многоступенчатые корректируемые алгоритмы ориентации в виде уравнений Пуассона на основе параметров Родрига–Гамильтона с введенными членами горизонтальной радиальной и интегрально-позиционной коррекции по информации блока акселерометров. За счет выбора структуры и значений коэффициентов коррекции можно обеспечить асимптотическую устойчивость решений уравнений и выполнение условий Шулера.

В работах [8–10] ИИМ дополнен трехкомпонентным магнитометром, по показаниям которого H_y, H_z в связанной системе координат, горизонтальной составляющей напряженности магнитного поля Земли L и магнитному склонению D определяется угол курса

$$\psi = \arcsin\{(H_z \cdot \cos\gamma - H_y \cdot \sin\gamma)/L\} - D. \quad (5)$$

Начальные значения углов крена γ и тангажа определяются с помощью ТИКУ, измеряющего проекции ускорения свободного падения g_x, g_y, g_z на оси связанной системы координат при неподвижном и равномерно движущемся объекте:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \arcsin(-g_x/g); \\ \gamma &= \arctg(g_z/g_y). \end{aligned} \quad (6)$$

Алгоритм работы БИСО сводится к решению уравнения вида (1) при заданных начальных условиях $\Lambda(0)$, вычисляемых по следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \lambda_0(0) &= \cos(\psi/2)\cos(\vartheta/2)\cos(\gamma/2) - \sin(\psi/2)\sin(\vartheta/2)\sin(\gamma/2); \\ \lambda_1(0) &= \cos(\psi/2)\cos(\vartheta/2)\sin(\gamma/2) + \sin(\psi/2)\sin(\vartheta/2)\cos(\gamma/2); \\ \lambda_2(0) &= \sin(\psi/2)\cos(\vartheta/2)\cos(\gamma/2) + \cos(\psi/2)\sin(\vartheta/2)\sin(\gamma/2); \\ \lambda_3(0) &= \cos(\psi/2)\sin(\vartheta/2)\cos(\gamma/2) - \sin(\psi/2)\cos(\vartheta/2)\sin(\gamma/2). \end{aligned} \quad (7)$$

По элементам найденного кватерниона Λ определяются углы ориентации согласно формулам (4). Далее применяется компенсационная схема на основе ПИ-регулятора [8], которая позволяет отфильтровать измерительные шумы акселерометров, выделить и компенсировать дрейф гироскопов.

Таким образом, в приведенных выше работах для корректировки результатов определения углов ориентации по информации ТГИУС с помощью ТИКУ или ТИКУ и магнитометра ис-

пользуется ПИ-регулятор. В работе [11] на примере алгоритмов ориентации в направляющих косинусах показано, что такой подход может привести к ухудшению соотношения сигнал/шум в оценках параметров ориентации, так как система имеет свойства полосового фильтра по отношению к сигналам ТГИУС. В связи с этим были разработаны кватернионные корректируемые кинематические уравнения с перекрестными связями между каналами по сигналам позиционной коррекции.

Корректируемые кватернионные кинематические уравнения с перекрестными связями. Применим позиционную коррекцию с перекрестными связями, предложенную авторами в [11, 12] для уравнений Пуассона в направляющих косинусах, для кватернионных уравнений. В матричной форме, без учета коррекции нормы кватерниона, уравнение (2) примет вид:

$$2\dot{\lambda} = \mathbf{M}(\lambda)\omega - \mathbf{k}(\lambda - \lambda_k) - \mathbf{k}_p(\lambda - \lambda_k). \quad (8)$$

Здесь \mathbf{k} и \mathbf{k}_p — матрицы коэффициентов позиционной и перекрестной позиционной коррекции

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{k}_p = \begin{bmatrix} 0 & k_{p1} & k_{p2} & k_{p3} \\ -k_{p0} & 0 & k_{p2} & -k_{p3} \\ -k_{p0} & -k_{p1} & 0 & k_{p3} \\ -k_{p0} & k_{p1} & -k_{p2} & 0 \end{bmatrix},$$

λ_k — матрица коррекции (4×1), элементы которой вычисляются по сигналам ТИКУ и магнитометра с помощью выражений вида (5)–(7). При специально заданных знаках членов перекрестной коррекции в матрице \mathbf{k}_p уравнение (8) в скалярном виде представляет собой систему четырех линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1\omega_x - \lambda_2\omega_y - \lambda_3\omega_z - k_0(\lambda_0 - \lambda_{0k}) - k_{p1}(\lambda_1 - \lambda_{1k}) - k_{p2}(\lambda_2 - \lambda_{2k}) - k_{p3}(\lambda_3 - \lambda_{3k}); \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0\omega_x - \lambda_3\omega_y + \lambda_2\omega_z - k_1(\lambda_1 - \lambda_{1k}) + k_{p0}(\lambda_0 - \lambda_{0k}) - k_{p2}(\lambda_2 - \lambda_{2k}) + k_{p3}(\lambda_3 - \lambda_{3k}); \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_3\omega_x + \lambda_0\omega_y - \lambda_1\omega_z - k_2(\lambda_2 - \lambda_{2k}) + k_{p0}(\lambda_0 - \lambda_{0k}) + k_{p1}(\lambda_1 - \lambda_{1k}) - k_{p3}(\lambda_3 - \lambda_{3k}); \\ 2\dot{\lambda}_3 &= -\lambda_2\omega_x + \lambda_1\omega_y + \lambda_0\omega_z - k_3(\lambda_3 - \lambda_{3k}) + k_{p0}(\lambda_0 - \lambda_{0k}) - k_{p1}(\lambda_1 - \lambda_{1k}) + k_{p2}(\lambda_2 - \lambda_{2k}); \end{aligned} \quad (9)$$

Собственная матрица уравнений возмущенного движения системы (9) со входами λ_{ik} ($i = 0, 1, 2, 3$) имеет вид:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -k_0 & -\omega_x - k_{p1} & -\omega_y - k_{p2} & -\omega_z - k_{p3} \\ \omega_x + k_{p0} & -k_1 & \omega_z - k_{p2} & -\omega_y + k_{p3} \\ \omega_y + k_{p0} & -\omega_y + k_{p1} & -k_2 & \omega_x - k_{p3} \\ \omega_z + k_{p0} & \omega_y - k_{p1} & -\omega_x + k_{p2} & -k_3 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Характеристический полином при выполнении равенств $k_i = k$, $k_{pi} = k_p$ ($i = 0, 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 &= 0; \\ a_0 &= 1; \\ a_1 &= 4k; \\ a_2 &= 6(k^2 + k_p^2) + 2w; \\ a_3 &= 4k((k^2 + 3k_p^2) + w); \\ a_4 &= k^4 + 6k^2 k_p^2 + 9k_p^4 + 2w(k^2 - 3k_p^2) + 2(\omega_x^2 \omega_y^2 + \omega_x^2 \omega_z^2 + \omega_y^2 \omega_z^2) + \omega_x^4 + \omega_y^4 + \omega_z^4; \\ w &= \omega_x^4 + \omega_y^4 + \omega_z^4. \end{aligned} \quad (11)$$

Считая основание неподвижным, получим:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -k & -k_p & -k_p & -k_p \\ k_p & -k & -k_p & k_p \\ k_p & k_p & -k & -k_p \\ k_p & -k_p & k_p & -k \end{bmatrix}.$$

Корни характеристического уравнения в этом случае:

$$p = \begin{bmatrix} -k + i\sqrt{3}k_p \\ -k + i\sqrt{3}k_p \\ -k - i\sqrt{3}k_p \\ -k - i\sqrt{3}k_p \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Из характеристических уравнений и их корней следует, что условия асимптотической устойчивости системы могут быть выполнены при любых знаках угловых скоростей, при этом значения коэффициентов позиционной коррекции должны быть положительными. Переходные процессы и частотные характеристики соответствуют колебательному звену четвертого порядка, система допускает настройку на период Шулера.

На рис. 1 приведены графики амплитудно-фазовой частотной характеристики системы относительно сигналов датчиков с коррекцией в соответствии с уравнениями (9), полученные с помощью математического моделирования БИСО в пакете Matlab Simulink. Численные значения коэффициентов задавались в соответствии с настройкой системы на два последовательно соединенных фильтра нижних частот (ФНЧ) Баттерворта с полосой пропускания 0–10 Гц: $k = 44,4$; $k_p = 25,64$. Таким образом, в данном случае БИСО представляет собой ФНЧ по отношению к выходным сигналам всех датчиков.

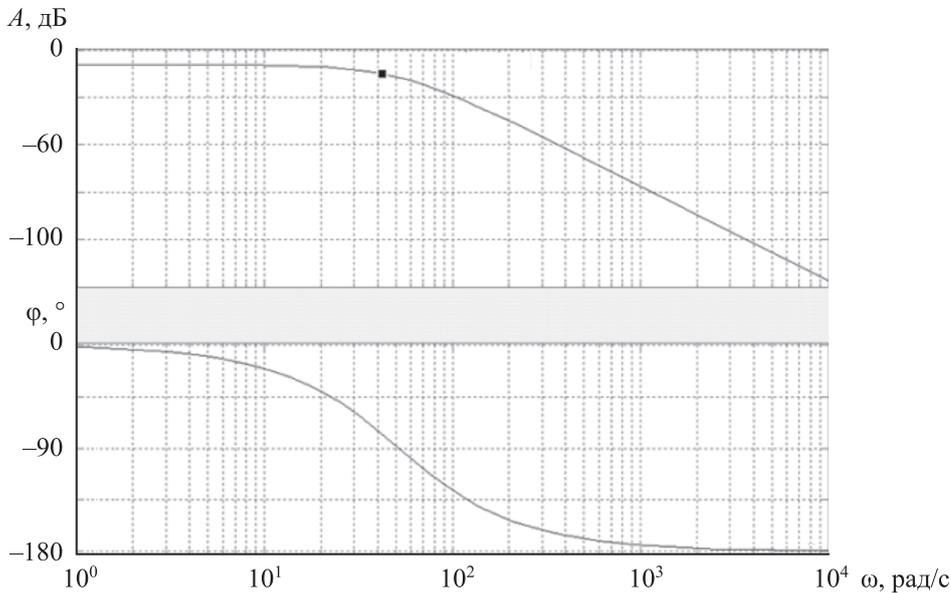


Рис. 1

Другие варианты знаков при членах коррекции приводят к следующим результатам. Для собственной матрицы

$$\begin{bmatrix} k + p & k_p & k_p & -k_p \\ -k_p & k + p & -k_p & -k_p \\ -k_p & k_p & k + p & -k_p \\ k_p & k_p & -k_p & k + p \end{bmatrix}$$

корни характеристического уравнения будут:

$$p \rightarrow \begin{bmatrix} -k + ik_p \\ -k - ik_p \\ -k + i\sqrt{3}k_p \\ -k - i\sqrt{3}k_p \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Корни характеристических уравнений — комплексно-сопряженные с отрицательными вещественными частями, что позволяет настраивать систему на ФНЧ 4-го порядка и период Шулера. Однако вариант (12) предпочтителен, поскольку корни представляют собой две одинаковые комплексно-сопряженные пары, что упрощает настройку. При других вариантах задания знаков членов коррекции либо не достигаются цели настройки, либо результаты совпадают с (13), (12).

Рассмотрим влияние величин проекций вектора абсолютной угловой скорости объекта на устойчивость системы (9). Составим определители Гурвица и проверим влияние угловых скоростей на выполнимость условий $\Delta_i > 0$ ($i = 2, 3$), кроме очевидных $\Delta_i > 0$ ($i = 1, 4$):

$$\begin{aligned} \Delta_2 = a_1 a_3 - a_2 &= 16k^2((k^2 + 3k_p^2) + w) - 6(k^2 + k_p^2) + 2w > 0; \\ \Delta_3 = a_3 \Delta_2 - a_1^2 a_4 &> 0; \\ \Delta_4 = a_4 \Delta_3 &> 0. \end{aligned}$$

Определим предельные значения $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, для которых при положительных a_i нарушаются условия асимптотической устойчивости $\Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$. В уравнении

$$a_1 a_3 - a_2 = 0 \quad (14)$$

выразим ω_x^2 через ω_y, ω_z и построим график зависимости $\omega_x^2(\omega_y, \omega_z)$ при изменениях последних в пределах ± 5 рад/с (рис. 2, а), из которого следует, что не существует действительных значений ω_x , при которых выполняется равенство (14). Введем новую переменную $z = \omega_x^2$ в уравнение $a_3 \Delta_2 - a_1^2 a_4 = 0$ и получим квадратное уравнение относительно этой переменной вида $az^2 + bz + c = 0$. Так как нас интересуют действительные положительные и равные корни этого уравнения, должно выполняться условие $b^2 - 4ac = 0$, при котором $z_{1,2} = -b^2/2 > 0$. Из первого условия следует область значений ω_y, ω_z (рис. 2, б), при которых может быть выполнено второе условие. Задавая значения ω_y, ω_z из этой области, построим график зависимости $b(\omega_y, \omega_z)$ (рис. 2, в), из которого следует, что при изменении ω_x в пределах ± 5 рад/с и ω_y, ω_z — в пределах ± 4 рад/с условия асимптотической устойчивости системы (9) выполняются, поскольку $b > 0$.

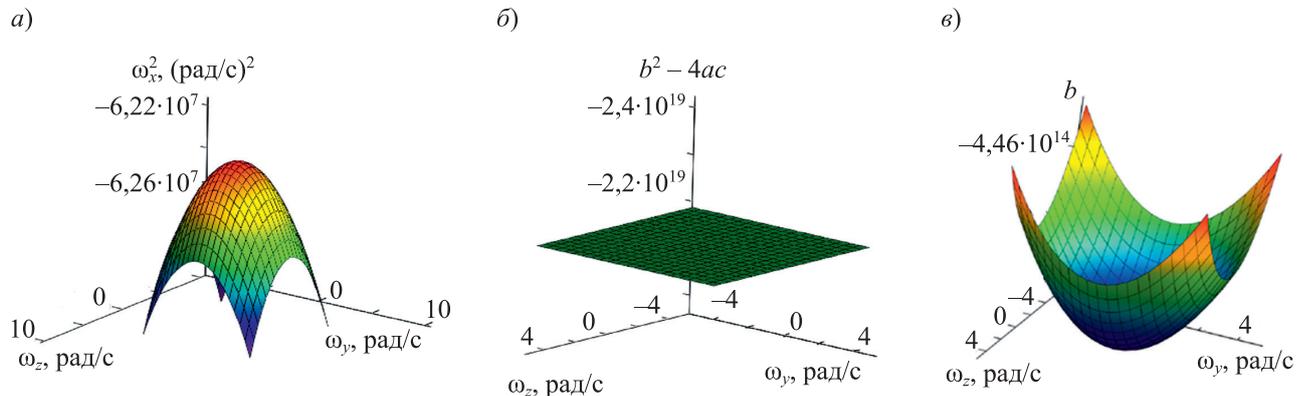


Рис. 2

Математическое моделирование работы ИИМ и БИСО. Математическое моделирование работы ИИМ с ТГИУС, ТИКУ и магнитометра на борту подвижного объекта и БИСО с коррекцией проводилось в среде Matlab (Simulink).

На рис. 3 приведена блок-схема процесса моделирования. Описание работы блоков и их математические модели приведены в [13]. Для построения графиков входных и выходных сигналов и частотных характеристик использовались штатные блоки Scope и Bode Plot, подключаемые в соответствующих точках модели.

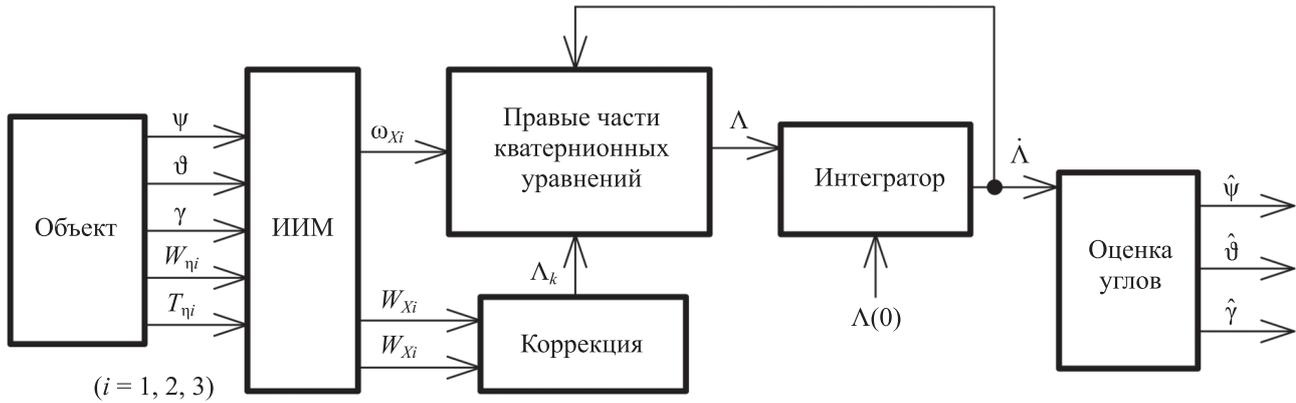


Рис. 3

Графики переходных процессов, представленные на рис. 4, подтверждают асимптотическую устойчивость решений кинематических уравнений вне зависимости от наличия угловых скоростей.

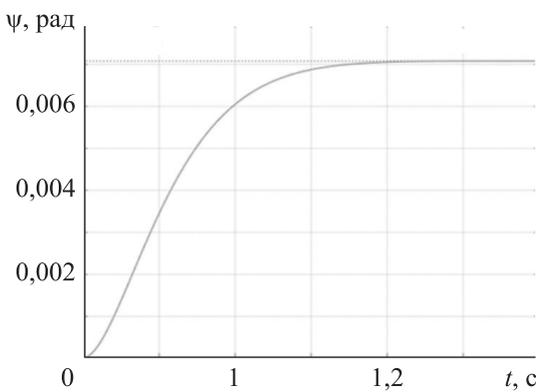


Рис. 4

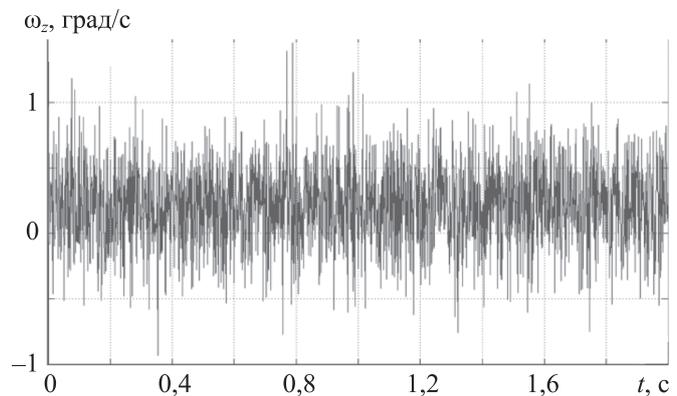


Рис. 5

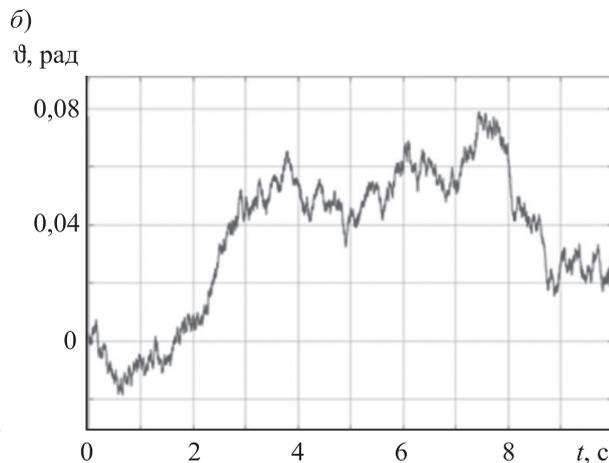
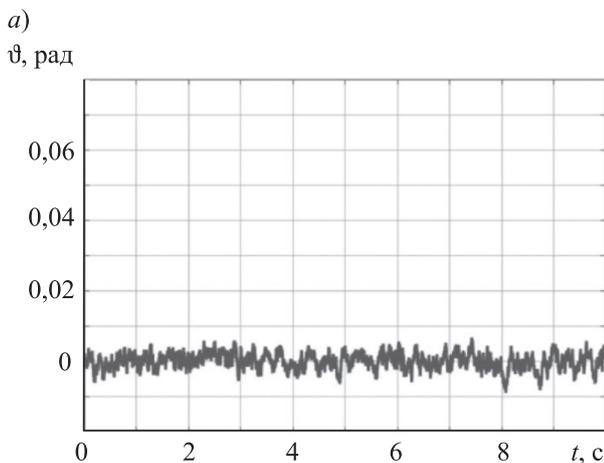


Рис. 6

Для проверки эффективности подавления шумов на выходные сигналы датчиков были наложены белые шумы с нулевым математическим ожиданием и мощностью, соответствующей паспортным данным ИИМ. Для примера на рис. 5 приведены графики сигнала микромеханического гироскопа, а на рис. 6 — оценки угла тангажа при неподвижном основании по двум алгоритмам с позиционной коррекцией (*a* — с перекрестными связями; *b* — без них).

Рис. 6 подтверждает эффективность подавления шумов датчиков в оценках углов. В результате применения коррекции дисперсия шумов снижена на два порядка.

Результаты натуральных испытаний макета БИСО. Для проведения эксперимента был использован ИИМ МЭМС MPU-9250 (трехосевые акселерометр, гироскоп и магнитометр).

Для оценки влияния движения объекта на точность определения параметров ориентации были проведены натурные испытания БИСО на подвижном основании, в качестве которого использовался автомобиль. На рис. 7 приведен пример маршрута движения. Запись сигналов датчиков и оценок углов, рассчитанных в ходе решения кинематических уравнений, проводилась без коррекции и с ее применением.

В первом случае графики оценок углов по курсу, тангажу и крену (фрагмент) представлены на рис. 8, *a*. В этом случае условия асимптотической устойчивости решений кинематических уравнений не выполняются, а начальные и конечные значения оценок углов, отображенные на рис. 8, *a*, не совпадают в одной и той же точке маршрута, отличаясь на $9,148^\circ$ по углу тангажа, на $21,042^\circ$ — по углу крена и на $33,8^\circ$ — по курсу за время движения 600 с.

Во втором случае (рис. 8, *b*) используется позиционная коррекция с перекрестными связями и настройкой на ФНЧ.

Начальные и конечные значения оценок углов практически совпадают: по углу курса $-76,27$ и $-76,96^\circ$, по тангажу $-0,1053$ и $0,439^\circ$, по крену $0,08312$ и $0,0334^\circ$. При этом средняя скорость дрейфа БИСО составила $0,298$ °/ч. Снижение средних квадратических отклонений оценок углов по тангажу и крену в 3,3 раза, оценок угла курса — в 2 раза объясняется использованием автомобиля в эксперименте.

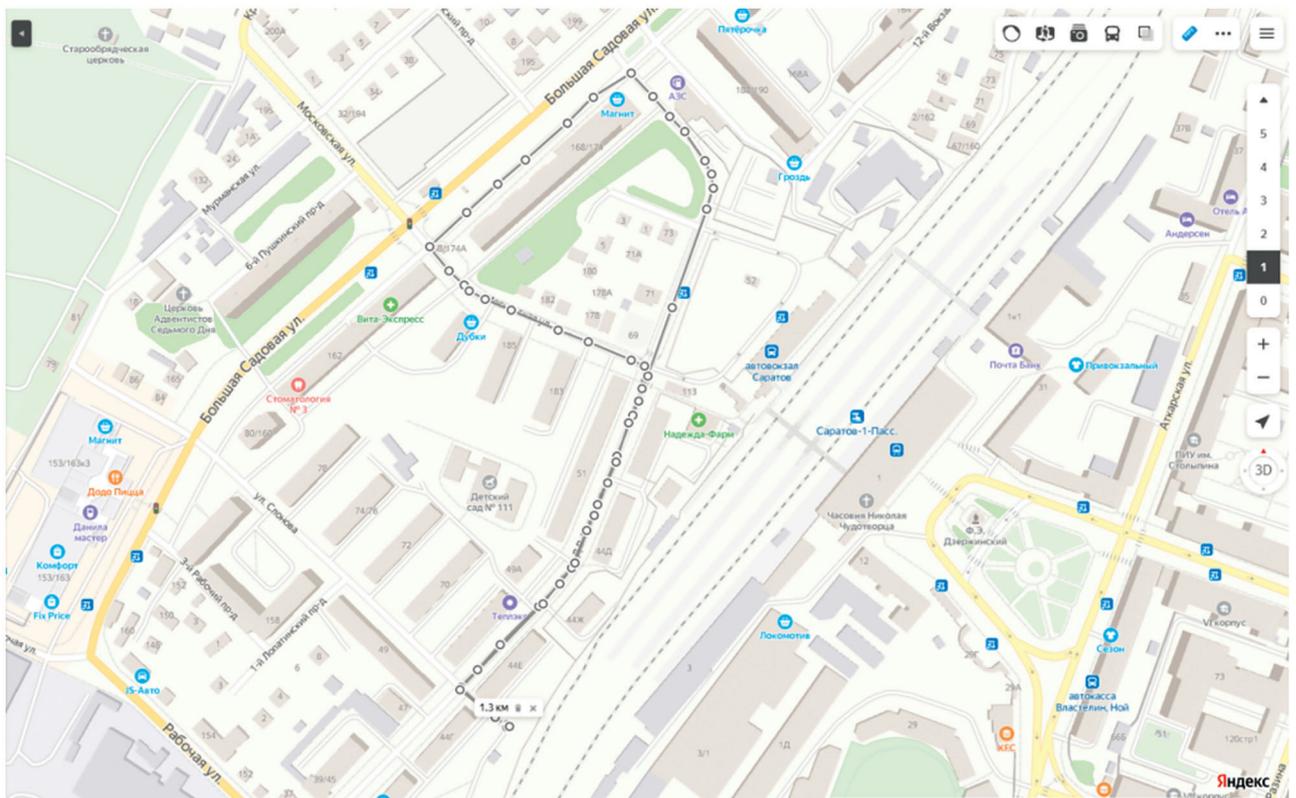


Рис. 7

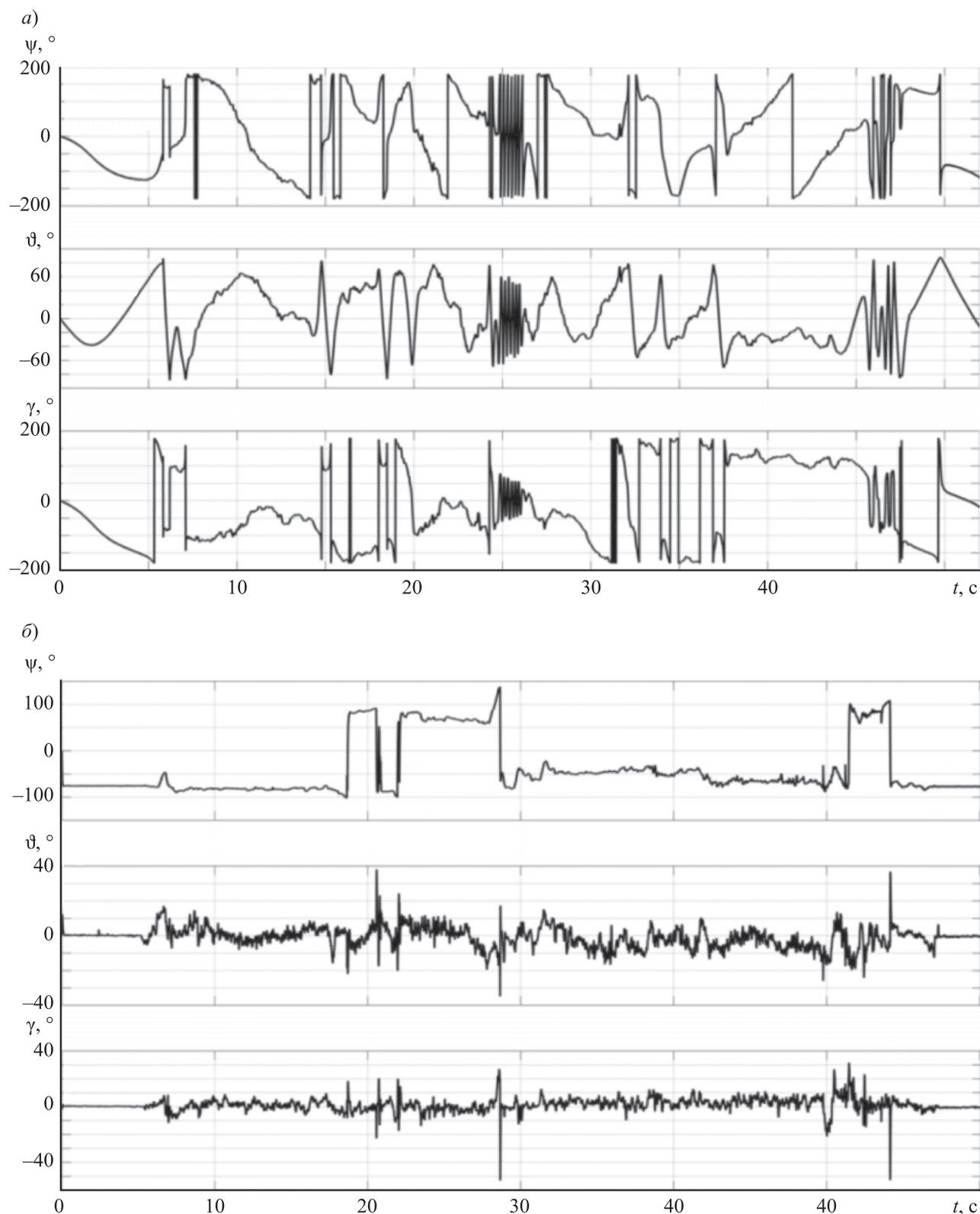


Рис. 8

Заключение. На основе кинематических уравнений Пуассона построены асимптотически устойчивые кватернионные кинематические уравнения работы БИСО по информации ИИМ, содержащего измерители трех компонентов вектора абсолютной угловой скорости, вектора кажущегося ускорения и напряженности магнитного поля Земли, обеспечивающие возможность настройки на период Шулера и ФНЧ с заданными частотными свойствами. Показано,

что перечисленные выше свойства сохраняются в диапазоне абсолютных угловых скоростей ± 4 рад/с.

С помощью математического моделирования подтверждены асимптотическая устойчивость решений кинематических уравнений, компенсация погрешностей начальной выставки БИСО, снижение дисперсии шумов в оценках углов ориентации на два порядка при настройке системы на фильтр нижних частот Баттерворта четвертого порядка с полосой пропускания 0–10 Гц.

Во время натурных испытаний макета БИСО на основе ИИМ МЭМС MPU-9250 на подвижном объекте погрешности оценок углов ориентации снижены на 2–3 порядка, средняя скорость дрейфа за время 600 с составила $0,298$ °/ч. Средние квадратические отклонения оценок углов по тангажу и крену снизились в 3,3 раза, оценок угла курса — в 2 раза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Матвеев В. В., Распопов В. Я.* Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем / Под ред. *В. Я. Распопова*. СПб: ЦНИИ „Электроприбор“, 2009. 280 с.
2. *Анучин О. Н., Емельянцева Г. И.* Интегрированные системы ориентации и навигации для морских подвижных объектов / Под ред. *В. Г. Пешехонова*. СПб: ЦНИИ „Электроприбор“, 2003. 390 с.
3. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
4. *Челноков Ю. Н.* Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 560 с.
5. *Плотников П. К., Лючев С. А.* Об устойчивости алгоритмов определения углов поворотов объекта по сигналам гироскопической бесплатформенной системы ориентации // Изв. вузов. Приборостроение. 1991. Т. 34, № 10. С. 62–68.
6. *Плотников П. К.* Элементы теории работы одной разновидности бесплатформенных инерциальных систем ориентации // Гироскопия и навигация. 1999. № 3. С. 23–35.
7. *Плотников П. К.* Построение и анализ кватернионных дифференциальных уравнений задачи определения ориентации твердого тела с помощью бесплатформенной инерциальной навигационной системы // Механика твердого тела. 1999. № 2. С. 3–14.
8. *Premarlani W., Bizard P.* Direction Cosine matrix IMU: Theory. 2009 [Электронный ресурс]: <<http://http://gentlenav.googlecode.com/files/DCMDraft2.pdf>>.
9. *Жидкова Н. В., Волков В. Л.* Моделирование бесплатформенной системы ориентации // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 1. С. 4–14.
10. *Волков В. Л., Жидкова Н. В.* Обработка информации в системе ориентации на основе МЭМС // Тр. Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева. Микромеханические системы. 2015. № 3. С. 279–286.
11. *Алешкин В. В., Здражевский Р. А., Голованов П. Н., Марусич В. О.* Методы и алгоритмы коррекции кинематических уравнений в задаче определения ориентации объекта // Мехатроника, автоматизация, управление. 2021. Т. 22, № 9. С. 494–504.
12. Пат. РФ 2738342, МПК G01 М 7/00, G01 М 15/00. Способ автономной ориентации подвижного объекта с помощью инерциального измерительного модуля / *В. В. Алешкин, Р. А. Здражевский, П. Н. Голованов, В. О. Марусич*. Заяв. № 2019145337 от 30.12.2019.
13. *Алешкин В. В., Голованов П. Н.* Модель БСО малоразмерного летательного аппарата на основе микромеханического инерциального измерительного модуля // Проблемы управления, обработки и передачи информации (УОПИ-2018): Сб. тр. VI Междунар. науч. конф. / Под ред. *А. А. Львова и М. С. Светлова*. Саратов: Лоди, 2019. С. 79–84.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

- Валерий Викторович Алешкин** — докт. техн. наук, доцент; Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., кафедра приборостроения; профессор; E-mail: aleshkinvv@yandex.ru
- Роман Анатольевич Здражевский** — канд. техн. наук; Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., кафедра приборостроения; доцент; E-mail: sweetnuts@inbox.ru
- Юрий Максимович Ефремов** — магистрант; Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., кафедра приборостроения; E-mail: yuriy.maksimovic@gmail.com
- Сергей Александрович Скибин** — аспирант; Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., кафедра приборостроения; E-mail: serega.skibin@mail.ru

Поступила в редакцию 16.02.2024; одобрена после рецензирования 29.04.2024; принята к публикации 19.06.2024.

REFERENCES

1. Matveev V.V., Raspopov V.Ya. *Osnovy postroyeniya besplatformennykh inertsiyal'nykh navigatsionnykh sistem* (Fundamentals of constructing Strapdown Inertial Navigation Systems), St. Petersburg, 2009, 280 p. (in Russ.)
2. Anuchin O.N., Emelyantsev G.I. *Integrirrovannyye sistemy orientatsii i navigatsii dlya morskikh podvizhnykh ob'yektov* (Integrated Orientation and Navigation Systems for Marine Mobile Objects), St. Petersburg, 2003, 390 p. (in Russ.)
3. Branets V.N., Shmyglevsky I.P. *Vvedeniye v teoriyu besplatformennykh inertsiyal'nykh navigatsionnykh sistem* (Introduction to the Theory of Strapdown Inertial Navigation Systems), Moscow, 1992, 280 p. (in Russ.)
4. Chelnokov Yu.N. *Kvaternionnyye modeli i metody dinamiki, navigatsii i upravleniya dvizheniyem* (Quaternion Models and Methods of Dynamics, Navigation and Motion Control), Moscow, 2011, 560 p. (in Russ.)
5. Plotnikov P.K., Lyuchev S.A. *Journal of Instrument Engineering*, 1991, no. 10(34), pp. 62–68. (in Russ.)
6. Plotnikov P.K. *Giroskopiya i Navigatsiya*, 1999, no. 3, pp. 23–35. (in Russ.)
7. Plotnikov P.K. *Mechanics of Rigid Bodies*, 1999, no. 2, pp. 3–14. (in Russ.)
8. Premerlani W., Bizard P. *Direction Cosine matrix IMU: Theory*, 2009, <http://gentlenav.googlecode.com/files/DCMDraft2.pdf>.
9. Zhidkova N.V., Volkov V.L. *Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya*, 2015, no. 1, pp. 4–14. (in Russ.)
10. Volkov V.L., Zhidkova N.V. *Trudy Nizhegorodskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. R.E. Alekseyeva. Mikromekhanicheskiye sistemy*, 2015, no. 3, pp. 279–286. (in Russ.)
11. Aleshkin V.V., Zdrachevskiy R.A., Golovanov P.N., Marusich V.O. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravleniye* (Mechatronics, Automation, Control), 2021, no. 9(22), pp. 494–504. (in Russ.)
12. Patent RU 2738342, G01 M 7/00, G01 M 15/00, *Sposob avtonomnoy orientatsii podvizhnogo ob'yekta s pomoshch'yu inertsiyal'nogo izmeritel'nogo modulya* (Method for Autonomous Orientation of a Moving Object Using an Inertial Measurement Module), V.V. Aleshkin, R.A. Zdrachevskiy, P.N. Golovanov, V.O. Marusich, Patent application no. 2019145337, Priority 30.12.2019. (in Russ.)
13. Aleshkin V.V., Golovanov P.N. *Problemy upravleniya, obrabotki i peredachi informatsii* (UOPI-2018) (Problems of Management, Processing and Transmission of Information (UPI-2018)), Proc. of the VI Intern. Sci. Conf., Saratov, 2019, pp. 79–84. (in Russ.)

DATA ON AUTHORS

- Valery V. Aleshkin** — Dr. Sci., Professor; Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Department of Instrument Engineering; Professor; E-mail: aleshkinvv@yandex.ru
- Roman A. Zdrachevsky** — PhD, Associate Professor; Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Department of Instrument Engineering; Associate Professor; E-mail: sweetnuts@inbox.ru
- Yury M. Efremov** — Master Student; Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Department of Instrument Engineering; E-mail: yuriy.maksimovic@gmail.com
- Sergey A. Skibin** — Post-Graduate Student; Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Department of Instrument Engineering; E-mail: serega.skibin@mail.ru

Received 16.02.2024; approved after reviewing 29.04.2024; accepted for publication 19.06.2024.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ВОЛНЫ ИЗЛУЧЕНИЯ В ОПТИЧЕСКОМ ВОЛОКНЕ**А. О. Зеневич, Е. В. Новиков, Т. А. Матковская*, А. В. Шваков***Белорусская государственная академия связи, Минск, Республика Беларусь*** t.matkovskaia@bsac.by*

Аннотация. Оптические волокна являются основой систем передачи данных. Однако во время эксплуатации оптический кабель может быть поврежден, и для устранения возникших повреждений в полевых условиях необходимо знать длину волны оптического излучения в этом волокне и мощность излучения по каждой из используемых длин волн. Этим определяется актуальность разработки доступного для использования в полевых условиях, без применения сложного и дорогостоящего оборудования, метода регистрации длины волны излучения на выходе оптического волокна. Предложен метод определения длины волны оптического излучения, распространяющегося по оптическому волокну, основанный на использовании макроизгиба последнего. Разработана экспериментальная установка для реализации метода. Показано, что такой метод может быть использован как для одномодового, так и для многомодового оптического волокна. Установлено, что для всех исследуемых оптических волокон отклонение определенных при помощи метода значений мощности от реальных не превышает 12,5 %. Результаты работы могут быть использованы в системах волоконно-оптической связи для определения длины волны и мощности излучения, распространяющегося по оптическому кабелю.

Ключевые слова: оптическое волокно, макроизгиб, длина волны, мощность оптического излучения

Ссылка для цитирования: Зеневич А. О., Новиков Е. В., Матковская Т. А., Шваков А. В. Определение длины волны излучения в оптическом волокне // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 8. С. 689–696. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-8-689-696.

DETERMINING THE WAVELENGTH OF RADIATION IN AN OPTICAL FIBER**A. O. Zenevich, E. V. Novikov, T. A. Matkovskaia*, A. V. Shvakov***Belarusian State Academy of Communications, Minsk, Republic of Belarus*** t.matkovskaia@bsac.by*

Abstract. Optical fibers are the basis of data transmission systems. However, during operation, the optical cable may be damaged, and to eliminate the damage that has occurred in the field, it is necessary to know the wavelength of optical radiation in this fiber and the radiation power for each of the wavelengths used. This determines the relevance of developing a method for recording the wavelength of radiation at the output of an optical fiber that is accessible for use in field conditions, without the use of complex and expensive equipment. A method for determining the wavelength of optical radiation propagating through an optical fiber based on the use of the fiber macrobending is proposed. An experimental setup for implementing the method is developed. It is shown that this method can be used for both single-mode and multimode optical fibers. It is established that for all the studied optical fibers, the deviation of the power values determined using the method from the real ones does not exceed 12.5 %. The results of the work can be used in fiber-optic communication systems to determine the wavelength and power of radiation propagating through an optical cable.

Keywords: optical fiber, macrobending, wavelength, optical radiation power

For citation: Zenevich A. O., Novikov E. V., Matkovskaia T. A., Shvakov A. V. Determining the wavelength of radiation in an optical fiber. *Journal of Instrument Engineering*. 2024. Vol. 67, N 8. P. 689–696 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-8-689-696.

Введение. В настоящее время оптические волокна находят широкое применение для передачи данных [1–4]. Во время эксплуатации оптических волокон возникают повреждения [5–9], для их устранения необходимо знать не только тип оптического волокна, по которому распространяется излучение, но и длину волны и мощность оптического излучения в этом волокне. Для определения длины волны излучения в оптическом волокне можно использовать оптические анализаторы спектра [10, 11]. Однако применение таких анализаторов в полевых условиях достаточно затруднительно. Кроме того, оптические анализаторы спектра являются дорогостоящими и сложными приборами. В связи с этим необходим метод регистрации длины волны и мощности оптического излучения на выходе оптического волокна, который мог бы применяться в полевых условиях на достаточно простом и недорогом оборудовании. Разработка такого метода, использующего влияние геометрических параметров макроизгиба на мощность излучения, распространяющегося по оптическому волокну, явилась целью настоящей статьи.

Сущность метода. Метод измерения мощности оптического излучения для каждой из длин волн, на которых ведется передача данных в оптическом волокне, заключается в следующем. В отдельности для каждой длины волны такого излучения определяется коэффициент уменьшения фототока фотоприемника при заданном радиусе макроизгиба оптического волокна. С этой целью устанавливается определенное значение мощности источника оптического излучения на заданной длине волны, затем это излучение по оптическому волокну направляется на фотоприемник и находится величина фототока. После этого в оптическом волокне формируется макроизгиб некоторого радиуса и определяется фототок фотоприемника. Затем вычисляется отношение фототоков при наличии и отсутствии макроизгиба этого волокна. Такие измерения и вычисления выполняются для всех длин волн.

В одномодовом оптическом волокне передача данных осуществляется на длинах волн, соответствующих „окнам прозрачности“ этого волокна: $\lambda = 1310, 1490, 1550$ и 1625 нм [12]. Поэтому для одномодового оптического волокна система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} I_{1\phi} = I_{\phi 1} + I_{\phi 2} + I_{\phi 3} + I_{\phi 4}, \\ I_{2\phi} = k_{11}I_{\phi 1} + k_{12}I_{\phi 2} + k_{13}I_{\phi 3} + k_{14}I_{\phi 4}, \\ I_{3\phi} = k_{21}I_{\phi 1} + k_{22}I_{\phi 2} + k_{23}I_{\phi 3} + k_{24}I_{\phi 4}, \\ I_{4\phi} = k_{31}I_{\phi 1} + k_{32}I_{\phi 2} + k_{33}I_{\phi 3} + k_{34}I_{\phi 4}, \end{cases} \quad (1)$$

где $I_{\phi 1}, I_{\phi 2}, I_{\phi 3}$ и $I_{\phi 4}$ — фототоки, возникающие в фотоприемнике в отсутствие макроизгиба оптического волокна под воздействием оптического излучения с $\lambda = 1310, 1490, 1550$ и 1625 нм соответственно; $I_{1\phi}$ — фототок, возникающий в фотоприемнике при воздействии на него смесью оптических излучений на $\lambda = 1310, 1490, 1550$ и 1625 нм, в отсутствие макроизгиба оптического волокна; $I_{2\phi}, I_{3\phi}, I_{4\phi}$ — фототоки, возникающие в фотоприемнике при воздействии на него смесью оптических излучений на $\lambda = 1310, 1490, 1550$ и 1625 нм при наличии в оптическом волокне макроизгибов с радиусом R_1, R_2, R_3 соответственно; k_{11}, k_{12}, k_{13} и k_{14} — коэффициенты уменьшения фототока фотоприемника для оптического излучения с $\lambda = 1310, 1490, 1550$ и 1625 нм соответственно и при наличии в волокне макроизгиба с радиусом R_1 ; k_{21}, k_{22}, k_{23} и k_{24} — коэффициенты уменьшения фототока фотоприемника для оптического излучения с $\lambda = 1310, 1490, 1550$ и 1625 нм соответственно и при наличии в волокне макроизгиба с R_2 ; k_{31}, k_{32}, k_{33} и k_{34} — коэффициенты уменьшения фототока фотоприемника для оптического излучения с $\lambda = 1310, 1490, 1550$ и 1625 нм соответственно и при наличии в волокне макроизгиба с R_3 .

Таким образом, параметры $I_{2\phi}, I_{3\phi}$ и $I_{4\phi}$ соответствуют величине фототоков фотоприемника при наличии макроизгибов одномодового оптического волокна с R_1, R_2, R_3 соответственно. Значение $I_{1\phi}$ определялось в отсутствие макроизгиба оптического волокна. Полученные значения фототоков $I_{1\phi}, I_{2\phi}, I_{3\phi}, I_{4\phi}$ и коэффициентов уменьшения фототока подставляются в систему уравнений (1). Затем решается система уравнений (1) и находится величина фототоков $I_{\phi 1}, I_{\phi 2}, I_{\phi 3}, I_{\phi 4}$.

В многомодовом оптическом волокне передача данных осуществляется на длинах волн, соответствующих „окнам прозрачности“ этого волокна: 850 и 1300 нм [13]. Поэтому для многомодового оптического волокна система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} I_{1\phi} = I_{\phi 1} + I_{\phi 2}, \\ I_{2\phi} = k_{11}I_{\phi 1} + k_{12}I_{\phi 2}, \end{cases} \quad (2)$$

где $I_{\phi 1}$ и $I_{\phi 2}$ — фототоки, возникающие в фотоприемнике под воздействием мощностей оптического излучения с $\lambda = 850$ и 1300 нм соответственно в отсутствие макроизгиба оптического волокна; $I_{1\phi}$ — фототок, возникающий в фотоприемнике при воздействии на него смесью оптических излучений, содержащих $\lambda = 850$ и 1300 нм в отсутствие макроизгиба оптического волокна; $I_{2\phi}$ — фототок, возникающий в фотоприемнике при воздействии на него смесью оптических излучений с $\lambda = 850$ и 1300 нм при наличии в оптическом волокне макроизгибов с R_1 ; k_{11} , k_{12} — коэффициенты уменьшения фототока фотоприемника для оптического излучения с $\lambda = 850$ и 1300 нм соответственно и при наличии в волокне макроизгиба с R_1 .

Таким образом, величина фототока фотоприемника $I_{2\phi}$ измеряется при наличии макроизгиба многомодового оптического волокна с радиусом R_1 . Значение $I_{1\phi}$ определяется в отсутствие макроизгиба этого волокна. Полученные значения фототоков $I_{1\phi}$, $I_{2\phi}$ и коэффициентов уменьшения фототока подставляются в систему уравнений (2), откуда и находятся величины фототоков $I_{\phi 1}$, $I_{\phi 2}$.

Чтобы найти мощность оптического излучения для каждого значения λ , необходимо полученное значение фототока для этой длины волны разделить на чувствительность фотоприемника на данной длине волны.

Таким образом, получив значения мощности излучения на каждой из возможных длин волн, можно сделать вывод о наличии в оптическом волокне излучения соответствующей длины волны и соотношении мощностей этих излучений.

Экспериментальная установка и методика измерений. Для реализации предложенного метода и измерения характеристик макроизгибов оптического волокна различных марок была создана экспериментальная установка, структурная схема которой представлена на рис. 1. В состав установки входят следующие узлы и блоки: И1, И2, И3, И4, И5 и И6 — источники оптического излучения с длинами волн 850, 1300, 1310, 1490, 1550 и 1625 нм соответственно; Б1 — блок управления источниками излучения; Б2 — блок управления формирователем макроизгиба; П1— П6 — патч-корды; ОМ — оптический мультиплексор; Ф — формирователь макроизгиба; ОВ — оптическое волокно; ФП — фотоприемник; А — амперметр.

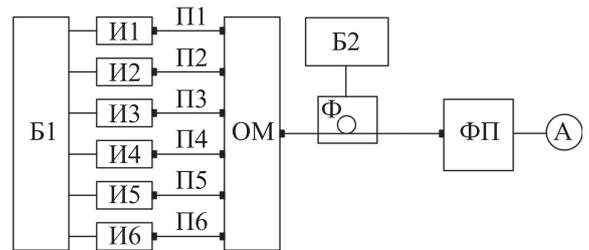


Рис. 1

В качестве источников излучения использовались полупроводниковые лазеры с $\lambda = 850$, 1300, 1310, 1490, 1550 и 1625 нм (рис. 1). При этом оптическое излучение с $\lambda = 850$ и 1300 нм применяется для исследования характеристик многомодового оптического волокна, а с $\lambda = 1310$, 1490, 1550 и 1625 нм — одномодового.

Мощность всех источников оптического излучения изменяется в диапазоне от 0,01 до 5 мВт с использованием Б1.

Экспериментальная установка функционирует следующим образом. Оптическое излучение от источников при помощи патч-кордов подается на оптический мультиплексор, имеющий шесть входов и один выход. ОМ соединяется при помощи оптического волокна с фотоприемником. Это позволяет оптическому излучению с выхода мультиплексора поступать на фотоприемник.

На ОВ формирователем создается макроизгиб в виде одного витка волокна. При помощи блока формирователя макроизгиба можно изменить радиус созданного макроизгиба в пределах

2,5–6,5 мм. Этот диапазон подобран таким образом, чтобы, с одной стороны, не наступил излом волокна, а с другой стороны, потеря мощности излучения на витке была измеримой.

Для измерения электрического тока фотоприемника используется амперметр.

При отключенных источниках излучения амперметром измеряется величина темнового электрического тока I_T , протекающего через ФП. При поступлении оптического излучения хотя бы от одного источника излучения возникает электрический ток I . Величина фототока вычисляется как разность между I и I_T .

В экспериментальной установке для регистрации оптического излучения, распространяющегося в одномодовых и многомодовых оптических волокнах, использовался фотоприемник на основе InGaAs PIN-фотодиод серии C30641GH.

Значения фототоков и коэффициентов уменьшения фототока для каждой из исследуемых длин волн измерялись при подключении к оптическому мультиплексору только одного источника оптического излучения. По величине фототока, полученной без макроизгиба оптического волокна, определялась мощность оптического излучения, соответствующая этой длине волны. При этом полученное значение фототока делится на чувствительность фотоприемника для этой длины волны оптического излучения.

При подключении источников И1 и И2 к оптическому мультиплексору фототоки $I_{1ф}$ и $I_{2ф}$ измерялись для многомодового оптического волокна. После чего определялась мощность И1 и И2 на основании представленного метода.

При подключении источников И3, И4, И5 и И6 к оптическому мультиплексору выполнялось измерение фототоков $I_{1ф}$, $I_{2ф}$, $I_{3ф}$ и $I_{4ф}$ для одномодового оптического волокна. После чего определялась мощность И3, И4, И5 и И6 на основании предложенного метода.

Измерения чувствительности фотоприемника к оптическому излучению с исследуемыми длинами волн экспериментально проводились на основании метода, описанного в ГОСТ 17772-88*.

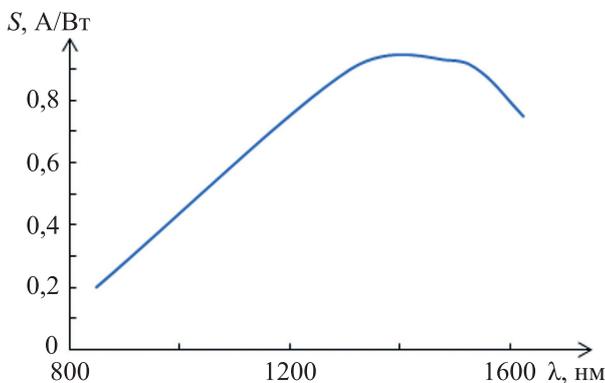


Рис. 2

На рис. 2 представлена зависимость чувствительности этого фотоприемника от длины волны падающего на него оптического излучения. Эта зависимость использовалась при вычислении мощности оптического излучения для каждой длины волны оптического излучения.

При проведении исследований определялись зависимости коэффициента уменьшения фототока k от радиуса макроизгиба оптического волокна R . Величина k в этом случае определялась (в децибелах, поскольку в исследуемом диапазоне радиусов коэффициенты могли отличаться на несколько порядков) по следующей формуле:

$$k = 10 \lg \left(\frac{I_0}{I_{\phi}} \right), \quad (3)$$

где I_0 — фототок, протекающий через фотоприемник в отсутствие макроизгиба; I_{ϕ} — фототок, протекающий через фотоприемник при наличии макроизгиба. Для других случаев коэффициент уменьшения фототока находился по формуле $k = I_{\phi}/I_0$.

* ГОСТ 17772-88. Приемники излучения полупроводниковые фотоэлектрические и фотоприемные устройства. Методы измерения фотоэлектрических параметров и определения характеристик. М.: Изд-во стандартов, 1988. 65 с.

Все измерения, представленные в настоящей статье, выполнялись в соответствии с требованиями ГОСТ ISO/IEC 17025-2019*. При этом обеспечивались следующие условия окружающей среды: температура от 20 до 25 °С, влажность до 70 %, атмосферное давление от 975 до 1025 гПа.

В качестве объектов исследований использовались серийно выпускаемые и широко применяемые в оптических кабелях оптические волокна G651 (многомодовое), G652, G655 и G657 (одномодовые).

Результаты измерений и их обсуждение. Выполнены исследования зависимости коэффициента уменьшения фототока фотоприемника k от радиуса макроизгиба R для различных длин волн оптического излучения. На рис. 3, а представлены типичные зависимости k от R , полученные для волокна G655. Таким же образом ведут себя зависимости для других исследуемых одномодовых оптических волокон. Как видно из рис. 3, а ($1 — \lambda = 1310$, $2 — 1490$, $3 — 1550$, $4 — 1625$ нм), уменьшение радиуса макроизгиба приводит к увеличению k . Аналогичным образом ведет себя зависимость k от R , полученная для многомодового оптического волокна G651 (см. рис. 3, б; $5 — \lambda = 850$, $6 — 1300$ нм).

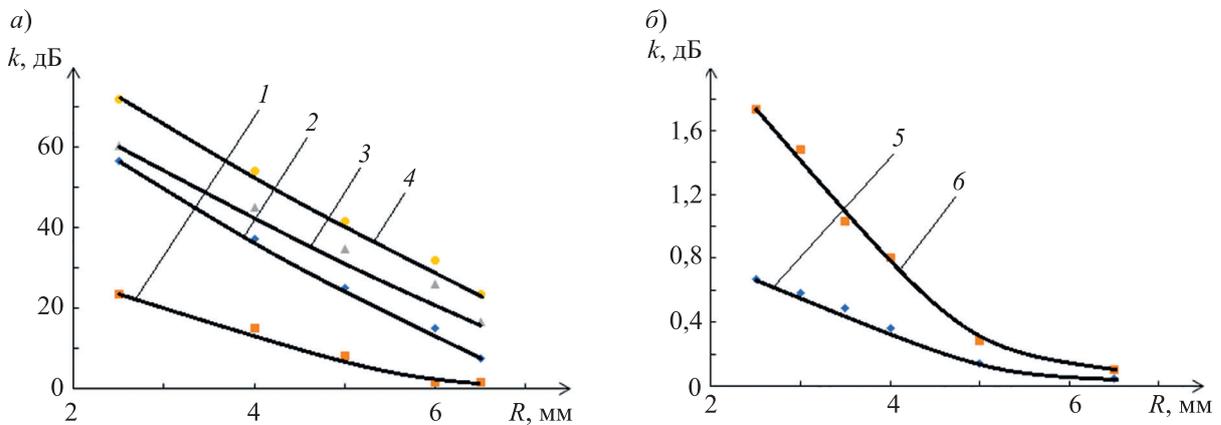


Рис. 3

Такое поведение зависимостей k от R связано со смещением модового пятна относительно оптической оси сердцевины волокна на некоторую величину, которая зависит от радиуса изгиба. Чем меньше радиус макроизгиба, тем большее смещение модового пятна происходит. При этом большая часть мощности оптического излучения, распространяющегося по сердцевине оптического волокна в области макроизгиба, переходит в оболочку этого волокна, после чего выходит за пределы оптического волокна, а значит, не поступает на фотоприемник.

Для одномодовых оптических волокон при одинаковых радиусах макроизгиба наибольшее значение k соответствует длине волны 1625 нм, а для многомодовых — 1300 нм.

В табл. 1 представлены данные о коэффициентах уменьшения фототока фотоприемника для трех радиусов макроизгиба одномодового оптического волокна и одного радиуса — для многомодового. Радиус каждого оптического волокна подбирался так, чтобы обеспечить отличие коэффициентов уменьшения фототока фотоприемника на каждой из исследуемых длин волн. Также значения радиуса подбирались для упрощения решения систем уравнений (1) и (2). Отметим: чем точнее подобраны радиусы R_1, R_2, R_3 , тем меньше погрешность определения мощности оптического излучения для каждого значения λ .

В табл. 2 представлены результаты определения мощности оптического излучения, направляемого в оптическое волокно, для каждой длины волны. Из данных таблицы следует, что разница ΔW вычисленных W_p и измеренных W_n значений мощности не превысила 12,5 % для всех исследуемых волокон.

* ГОСТ ISO/IEC 17025-2019. Общие требования к компетентности испытательных и калибровочных лабораторий. М.: Стандартинформ, 2021. 32 с.

Таблица 1. Коэффициенты уменьшения фототока при разных радиусах макроизгибов оптических волокон

Тип волокна	λ , нм	Радиус макроизгиба, мм			Коэффициент уменьшения фототока фотоприемника		
		R_1	R_2	R_3			
G652 (одномодовое)	1310	3,0	3,5	4,0	$k_{11} = 0,04$	$k_{21} = 0,40$	$k_{31} = 0,59$
	1490				$k_{12} = 0$	$k_{22} = 0,06$	$k_{32} = 0,13$
	1550				$k_{13} = 0$	$k_{23} = 0$	$k_{33} = 0,03$
	1625				$k_{14} = 0$	$k_{24} = 0$	$k_{34} = 0$
G655 (одномодовое)	1310	5,0	6,0	6,5	$k_{11} = 0,15$	$k_{21} = 0,82$	$k_{31} = 0,90$
	1490				$k_{12} = 0$	$k_{22} = 0,05$	$k_{32} = 0,22$
	1550				$k_{13} = 0$	$k_{23} = 0$	$k_{33} = 0,08$
	1625				$k_{14} = 0$	$k_{24} = 0$	$k_{34} = 0$
G657 (одномодовое)	1310	3,5	4,5	5,0	$k_{11} = 0,15$	$k_{21} = 0,38$	$k_{31} = 0,48$
	1490				$k_{12} = 0$	$k_{22} = 0,06$	$k_{32} = 0,09$
	1550				$k_{13} = 0$	$k_{23} = 0$	$k_{33} = 0,04$
	1625				$k_{14} = 0$	$k_{24} = 0$	$k_{34} = 0$
G651 (многомодовое)	850	2,5	—	—	$k_{11} = 0,97$		
	1300				$k_{12} = 0,93$		

Таблица 2. Вычисленные значения мощности оптического излучения для различных длин волн на выходе оптического волокна

λ , нм	$W_{и}$, мкВт	$W_{р}$, мкВт	ΔW , мкВт
Одномодовое оптическое волокно G652			
1310	99,3	104,4	5,1 (4,9 %)
1490	91,2	91,4	0,2 (0,2 %)
1550	90,9	87,2	3,7 (4,1 %)
1625	109,8	111,6	1,8 (1,6 %)
Одномодовое оптическое волокно G655			
1310	100,0	102,0	2,0 (2,0 %)
1490	92,1	89,4	2,7 (3,0 %)
1550	86,5	84,9	1,6 (1,9 %)
1625	91,9	96,4	4,5 (4,7 %)
Одномодовое оптическое волокно G657			
1310	99,5	103,3	3,8 (3,7 %)
1490	90,8	87,7	3,1 (3,4 %)
1550	89,9	85,2	4,7 (5,2 %)
1625	111,8	112,9	1,1 (1,0 %)
Многомодовое оптическое волокно G651			
850	14,4	16,4	2,0 (12,2 %)
1300	158,1	157,5	0,6 (0,38 %)

Таким образом, можно утверждать, что предложенный метод может быть использован для определения длины волны оптического излучения, распространяющегося по оптическому волокну, и мощности излучения на этой длине.

Если вычисленное значение мощности оптического излучения на выходе волокна равно нулю, это следует интерпретировать как отсутствие в волокне излучения с соответствующей длиной волны.

Заключение. Предложен метод определения на выходе оптического волокна излучения заданной длины волны и мощности при помощи макроизгибов различного радиуса. Преимуществом метода служит то, что он базируется на использовании достаточно простого оборудования и может применяться в полевых условиях. Показано, что метод применим как для одномодовых, так и для многомодовых оптических волокон.

Показано, что погрешность определения мощности с использованием предложенного метода не превышает 12,5 % для всех исследуемых видов оптических волокон.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Складов О. К. Волоконно-оптические сети и системы связи. М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2016. 265 с.
2. Убайдуллаев Р. Р. Волоконно-оптические сети. М.: Эко-Трендз, 2001. 267 с.
3. Ионов А. Д. Волоконно-оптические линии передачи. Новосибирск: СибГУТИ, 2003. 152 с.
4. Иоргачев Д. В., Бондаренко О. В. Волоконно-оптические кабели и линии связи. М.: Эко-Трендз, 2002. 282 с.
5. Мильков А. В., Яковлев М. Я. Оценка надежности оптического волокна на основе испытаний на кратковременную прочность и статическую усталость // Системы и средства связи, телевидения и радиовещания. 2002. № 1-2. С. 86–90.
6. Фомичев В. Н., Евдочков В. В. Анализ причин повреждений волоконно-оптических линий связи // Вестник Белорусского государственного университета транспорта: Наука и транспорт. 2012. № 2(25). С. 24–26.
7. Листвин А. В., Листвин В. Н. Рефлектометрия оптических волокон. М.: ЛЕСАРпт, 2005. 208 с.
8. Ситнов Н. Ю. Исследование методов ранней диагностики волоконно-оптических линий передачи: автореф. дис. ... канд. наук. Новосибирск, 2011. 26 с.
9. Glaesemann G. S. Optical fiber mechanical reliability. Review of research at Corning's optical fiber strength laboratory. White paper. NY: Corning Incorporated, 2017. 62 p.
10. Афонский А. А., Дьяконов В. П. Цифровые анализаторы спектра, сигналов и логики. М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2010. 248 с.
11. Agilent Spectrum Analysis Basics. USA: Agilent Technologies, 2000. 64 p.
12. Листвин А. В., Листвин В. Н., Швырков Д. В. Оптические волокна для линий связи. М.: ЛЕСАРпт, 2003. 288 с.
13. Agrawal G. P. Fiber-Optic Communication Systems. NY: Wiley-Interscience, 2002. 530 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Андрей Олегович Зеневич

— д-р техн. наук, профессор; Белорусская государственная академия связи; ректор; E-mail: a.zenevich@bsac.by

Евгений Владимирович Новиков

— канд. техн. наук, доцент; Белорусская государственная академия связи, директор Института современных технологий связи; E-mail: e.novikov@bsac.by

Татьяна Александровна Матковская

— аспирант; Белорусская государственная академия связи; кафедра физических и математических основ информатики; E-mail: tandem7m@gmail.com

Шваков Андрей Васильевич

— магистрант; Белорусская государственная академия связи; факультет электросвязи; E-mail: V-i-a-n-d-y@yandex.by

Поступила в редакцию 24.03.2024; одобрена после рецензирования 17.04.2024; принята к публикации 19.06.2024.

REFERENCES

1. Sklyarov O.K. *Volokonno-opticheskiye seti i sistemy svyazi* (Fiber Optic Networks and Communication Systems), Moscow, 2016, 265 p. (in Russ.)
2. Ubaydullaev R.R. *Volokonno-opticheskiye seti* (Fiber Optic Networks), Moscow, 2001, 267 p. (in Russ.)
3. Ionov A.D. *Volokonno-opticheskiye linii peredachi* (Fiber Optical Transmission), Novosibirsk, 2003, 152 p. (in Russ.)

4. Iorgachev D.V., Bondarenko O.V. *Volokonno-opticheskiye kabeli i linii svyazi* (Fiber Optic Cables and Communication Lines), Moscow, 2002. 282 p. (in Russ.)
5. Milkov A.V., Yakovlev M.Ya. *Sistemy i sredstva svyazi, televideniya i radioveshchaniya*, 2002, no. 1-2, pp. 86–90. (in Russ.)
6. Fomichev V.N., Evdochkov V.V. *Bulletin of the Belarusian State University of Transport: Science and Transport*, 2012, no. 2(25), pp. 24–26. (in Russ.)
7. Listvin A.V., Listvin V.N. *Reflektometriya opticheskikh volokon* (Reflectometry of Optical Fibers), Moscow, 2005, 208 p. (in Russ.)
8. Sitnov N.Yu. *Issledovaniye metodov ranney diagnostiki volokonno-opticheskikh liniy peredachi* (Study of Methods for Early Diagnosis of Fiber-Optic Transmission Lines), Extended abstract of candidate's thesis, Novosibirsk, 2011, 26 p. (in Russ.)
9. Glaesemann G.S. *Optical fiber mechanical reliability. Review of research at corning's optical fiber strength laboratory*, White paper, NY, Corning Incorporated, 2017, 62 p.
10. Afonskij A.A., Dyakonov V.P. *Tsifrovyye analizatory spektra, signalov i logiki* (Digital Spectrum, Signal and Logic Analyzers), Moscow, 2010. 248 p. (in Russ.)
11. *Agilent Spectrum Analysis Basics*, USA, Agilent Technologies, 2000, 64 p.
12. Listvin A.V., Listvin V.N., Shyrkov D.V. *Opticheskiye volokna dlya liniy svyazi* (Optical Fibres for Communication Lines), Moscow, 2003, 288 p. (in Russ.)
13. Agrawal G.P. *Fiber-Optic Communication Systems*, NY, Wiley-Interscience, 2002, 530 p.

DATA ON AUTHORS

Andrey O. Zenevich	— Dr. Sci., Professor; Belarusian State Academy of Communications; Rector; E-mail: a.zenevich@bsac.by
Eugeny V. Novikov	— PhD, Associate Professor; Belarusian State Academy of Communications, Institute of Modern Technologies of Communications; Director of the Institute; E-mail: e.novikov@bsac.by
Tatiana A. Matkovskaia	— Post-Graduate Student; Belarusian State Academy of Communications, Department of Physical and Mathematical Foundations of Computer Science; E-mail: tandem7m@gmail.com
Andrey V. Shvakov	— Master Student; Belarusian State Academy of Communications, Faculty of Telecommunications; E-mail: V-i-a-n-d-y@yandex.by

Received 24.03.2024; approved after reviewing 17.04.2024; accepted for publication 19.06.2024.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ СВЯЗАННЫХ МОД ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ МЕЖМОДОВОЙ СВЯЗИ В ИЗОГНУТЫХ ВОЛНОВОДАХ НА ОСНОВЕ ТОНКОПЛЕНОЧНОГО НИОБАТА ЛИТИЯ**Д. Н. Москалев^{1,2*}, Е. Д. Вобликов¹, В. В. Криштон^{1,2,3}, В. А. Максименко³, А. Б. Волинцев²**¹ Пермская научно-производственная приборостроительная компания, Пермь, Россия² Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия³ Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

* moskalevdn@pnppk.ru

Аннотация. Тонкопленочный ниобат лития, благодаря уникальным свойствам и возможности создания на его основе высококонтрастных волноводов, является перспективным материалом для изготовления быстродействующих фотонных интегральных схем с большим числом элементов на чипе. Однако процесс проектирования и моделирования элементов таких схем на тонкопленочном ниобате лития осложнен наличием анизотропии. Так, например, на X-срезе ниобата лития влияние анизотропии будет проявляться в изменении постоянной распространения мод, а также в перекачке мощности между модами при распространении излучения в плоскости пластины. Рассмотрена связь между фундаментальными ТЕ- и ТМ-модами в изогнутых одномодовых волноводах на X-срезе тонкопленочного ниобата лития. Межмодовая связь проанализирована с помощью теории связанных мод. Коэффициент связи вычислен по формулам, соответствующим случаям анизотропии произвольной и малой величины. Показано, что если рассматривается влияние только анизотропии кристалла, то расчет коэффициентов связи по формулам для произвольной и малой анизотропии дает схожие результаты. Доля перекачанной мощности между фундаментальными ТЕ- и ТМ-модами определялся путем решения уравнений связанных мод с учетом радиуса кривизны, угла поворота волновода и коэффициента связи.

Ключевые слова: теория связанных мод, тонкопленочный ниобат лития, изогнутый оптический волновод

Благодарность: Исследования выполнены при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0006).

Ссылка для цитирования: Москалев Д. Н., Вобликов Е. Д., Криштон В. В., Максименко В. А., Волинцев А. Б. Использование теории связанных мод при моделировании межмодовой связи в изогнутых волноводах на основе тонкопленочного ниобата лития // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 8. С. 697–712. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-8-697-712.

USING COUPLED MODE THEORY TO MODEL INTERMODE COUPLINGS IN CURVED WAVEGUIDES BASED ON THIN-FILM LITHIUM NIOBATE**D. N. Moskaev^{1,2*}, E. D. Voblikov¹, V. V. Krishtop^{1,2,3}, V. A. Maksimenko³, A. B. Volyntsev²**¹ Perm Scientific-Industrial Instrument Making Company, Perm, Russia² Perm State University, Perm, Russia³ Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

* moskalevdn@pnppk.ru

Abstract. Thin-film lithium niobate, due to its unique properties and the possibility of manufacturing high-contrast waveguides based on it, is a promising material for the production of high-speed photonic integrated circuits with a large number of elements per chip. However, the process of designing and modeling elements of such circuits on thin-film lithium niobate is complicated by the presence of anisotropy. For example, on the X-cut of lithium niobate, the influence of anisotropy will manifest itself in a change in the mode propagation constant, as well as in the transfer of power between modes during the propagation of radiation in the plane of the plate. The coupling between fundamental TE and TM modes in curved single-mode waveguides on the X-cut of thin-film lithium niobate is considered. The intermode coupling is analyzed using the coupled-mode theory. The coupling coefficient is calculated using the formulas corresponding to the cases of arbitrary and small anisotropy. It is shown that if only the influence of the crystal anisotropy is considered, then the calculation of the coupling coefficients using the formulas for arbitrary and small anisotropy gives similar results. The volume of the transferred power between the fundamental TE and TM modes is determined by solving the coupled-mode equations taking into account the radius of curvature, the angle of rotation of the waveguide, and the coupling coefficient.

Keywords: coupled mode theory, thin-film lithium niobate waveguides, bend optical waveguides, mode coupling

Acknowledgment: The research was carried out with the support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. FSNM-2023-0006)

For citation: Moskalev D. N., Voblikov E. D., Krishtop V. V., Maksimenko V. A., Volyntsev A. B. Using coupled mode theory to model intermode couplings in curved waveguides based on thin-film lithium niobate. *Journal of Instrument Engineering*. 2024. Vol. 67, N 8. P. 697–712 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-8-697-712.

Введение. В современном оптическом приборостроении широко используются технологии интегральной фотоники, обеспечивающие уменьшение размеров оптических систем на объемных элементах и повышение их надежности и энергоэффективности [1–3].

Для изготовления фотонных интегральных схем (ФИС) используется множество различных материалов. Выбор конкретного материала зависит от требований, которым должна удовлетворять ФИС (низкие потери, возможность изготавливать как активные, так и пассивные элементы, малые радиусы кривизны и т. д.) [4–11]. Ниобат лития (LiNbO_3) является одним из важнейших и уникальных материалов, используемых в фотонике. Он обладает выраженными нелинейными характеристиками, электрооптическим и пироэффектом, широким окном прозрачности [12, 13]. Различные устройства, такие как модуляторы фазы и интенсивности, делители мощности, делители поляризации, уже долгое время изготавливаются на ниобате лития [13–15]. Следующим шагом в применении ниобата лития для изготовления ФИС стало использование тонкопленочного ниобата лития (или ниобата лития на изоляторе), представляющего собой кристаллическую пленку толщиной порядка сотни микрон на подложке из оксидированного кремния (рис. 1) [16–19].

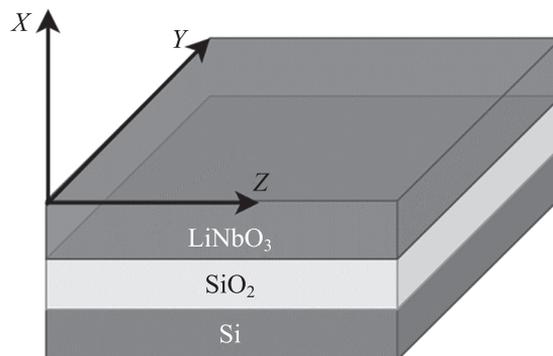


Рис. 1

Волноводы на тонкопленочном ниобате лития являются высококонтрастными (для длины волны 1,55 мкм разница в величине показателей преломления составляет $0,75 \leq \Delta n \leq 1,21$) со ступенчатым профилем показателя преломления, они обычно изготавливаются методом реактивного ионного травления [20], в отличие от волноводов, формируемых с помощью диффузии, в объемном ниобате лития. Высокий контраст показателей преломления материалов и среды позволяет изготавливать ФИС с высокой плотностью размещения элементов на одном чипе. Такие ФИС не могут быть реализованы с помощью технологий протонного обмена или диффузии титана. ФИС на основе тонкопленочного ниобата лития могут содержать изогнутые волноводы, кольцевые резонаторы и другие элементы, расположенные под произвольными углами к кристаллографическим осям [17]. Отсюда следует, что при проектировании подобных элементов ФИС должна учитываться анизотропия кристалла, которая может приводить к межмодовой связи, изменению постоянной распространения и вращению плоскости поляризации излучения [21–23].

Трехмерный метод конечных разностей во временной области, широко используемый для моделирования распространения излучения в волноводных структурах, позволяет точно учесть

все эффекты, вызванные анизотропией кристалла и геометрией исследуемого элемента ФИС [22, 24]. Тем не менее, этот метод является ресурсоемким и может требовать более одного дня машинного времени на проведение моделирования [25].

Метод распространяющегося пучка также может применяться для моделирования волноводов с произвольной анизотропией [26, 27], однако он плохо подходит для моделирования кольцевых резонаторов или изогнутых под большим углом волноводов вследствие использования в методе аппроксимации медленно меняющейся амплитуды [28]. В случае моделирования поперечного сечения волновода с произвольной анизотропией для поиска мод и постоянных распространения могут применяться различные модовые решатели [29, 30].

Метод на основе теории связанных мод (ТСМ) использует разложение поперечного электромагнитного поля по базисным функциям (волноводным и радиационным модам) и анализ связи между этими модами, возникающей вследствие изменения характеристик волновода [31]. Количество мод в разложении, которые необходимо учитывать, определяется, во-первых, числом волноводных мод в волноводе; во-вторых, силой связи между модами (величиной коэффициента связи) и разницей в значениях постоянных распространения мод. Используя ТСМ, возможно рассматривать связь только между небольшим конечным набором мод (например, между двумя фундаментальными модами с ортогональными поляризациями), что позволяет значительно упростить процесс расчета. Так, например, в одномодовых волноводах можно ограничиться учетом связи только фундаментальных мод между собой и при необходимости — связи между фундаментальными и радиационными модами [31–33]. Также допустимо ограничиться учетом связи двух или нескольких мод при моделировании брэгговских решеток [34, 35]. Кроме того, такой подход справедлив при моделировании связи мод в изогнутых волноводах [36–38].

В перспективе на основе ТСМ и метода модового согласования [39, 40] может быть сформулирована матричная модель анизотропного кольцевого резонатора. С этой целью в настоящей статье рассматриваются особенности моделирования процесса перекачки мощности между фундаментальными ТЕ- и ТМ-модами в изогнутых волноводах на основе X-среза тонкопленочного нитрида лития с покровным слоем из SiO₂ и воздуха.

Методы. Ключевые этапы применения метода ТСМ:

- 1) выбор некоторого базового волновода и расчет его собственных мод и постоянных распространения;
- 2) вычисление коэффициента связи между модами, величина которого будет зависеть от величины возмущения тензора диэлектрической проницаемости;
- 3) расчет изменения амплитуды каждой отдельной моды.

Изменение амплитуд мод описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{da_{\mu}}{dz} = -i\beta_{\mu}a_{\mu} + \sum_{\nu} K_{\mu\nu}a_{\nu}, \quad (1)$$

где a_{μ} , a_{ν} — комплексные амплитуды μ -й и ν -й моды соответственно; β_{μ} — постоянная распространения μ -й моды; $K_{\mu\nu}$ — коэффициент связи между μ -й и ν -й модами.

Коэффициент связи позволяет вычислить проекцию одной моды на другую при наличии изменения характеристик базового волновода, например, какой-либо геометрической неоднородности волновода или анизотропии, приводящих к возмущению тензора диэлектрической проницаемости. Обычно предполагается, что величина этого возмущения мала [31], в таком случае коэффициент связи определяется уравнением:

$$K_{\mu\nu} = \frac{\omega}{4iP} \iint \mathbf{E}_{\mu}^* \Delta \epsilon \mathbf{E}_{\nu} dx dy, \quad (2)$$

где ω — круговая частота, i — мнимая единица, P — нормировочный коэффициент, $\Delta \epsilon$ — изменение тензора диэлектрической проницаемости; \mathbf{E}_{μ} , \mathbf{E}_{ν} — векторы напряженности электри-

ческого поля μ -й и ν -й моды, звездочкой обозначено комплексное сопряжение. Однако Маркузе показал, что коэффициент связи в уравнениях ТСМ может быть получен для анизотропии произвольной величины [39]. Тогда уравнение для коэффициента связи принимает вид:

$$K_{\mu\nu} = \frac{i\omega}{4P} \iint \left\{ \mathbf{E}_{\mu t}^* \left[\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_z}{\varepsilon_{zz}} - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}'_t \boldsymbol{\varepsilon}'_z}{\varepsilon'_{zz}} \right) - (\varepsilon_t - \varepsilon'_t) \right] \mathbf{E}_{\nu t} - \mathbf{E}_{\mu t}^* \left(\frac{\varepsilon'_{zz}}{\varepsilon_{zz}} \varepsilon_t - \varepsilon'_t \right) \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}'_z}{\varepsilon'_{zz}} \mathbf{E}_{\nu t} + \mathbf{E}_{\nu z} \right) + \right. \\ \left. + (\varepsilon'_z \mathbf{E}_{\mu t}^* - \varepsilon'_{zz} \mathbf{E}_{\mu z}^*) \left[\left(\frac{\varepsilon'_{zz}}{\varepsilon_{zz}} - 1 \right) \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_z}{\varepsilon_{zz}} \mathbf{E}_{\nu t} + \mathbf{E}_{\nu z} \right) - \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_z}{\varepsilon_{zz}} - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}'_z}{\varepsilon'_{zz}} \right) \mathbf{E}_{\nu t} \right] \right\} dx dy, \quad (3)$$

где $\mathbf{E}_{\mu t}$, $\mathbf{E}_{\nu t}$ — векторы напряженности электрического поля μ -й и ν -й моды, индекс t обозначает, что компоненты x и y вектора — ненулевые (индекс z обозначает, что только z -компонент вектора ненулевой), $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ — тензор диэлектрической проницаемости с ненулевыми строками, соответствующими компонентам x и y :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_z$ — тензор диэлектрической проницаемости с ненулевой строкой, соответствующей z -компоненту:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix},$$

ε_{zz} — z -компонент тензора диэлектрической проницаемости. Тензор диэлектрической проницаемости $\boldsymbol{\varepsilon}$ без апострофа задает изогнутый волновод, тензор диэлектрической проницаемости с апострофом $\boldsymbol{\varepsilon}'$ — базовый (прямой). Подход Маркузе потенциально применим к более широкому классу задач (например, к задаче моделирования изогнутого гофрированного волновода на основе анизотропного материала), так как не накладывает ограничений на величину анизотропии и возмущения тензора диэлектрической проницаемости.

В общем случае в изогнутом волноводе профиль моды может изменяться (появляются асимметрия в распределении поля и смещение максимума интенсивности относительно центра волновода), когда радиус изгиба волновода достаточно мал. Также при малых радиусах кривизны может происходить гибридизация мод. Гибридные моды характеризуются близкими значениями постоянных распространения и одинаковыми по направлению и величине векторами напряженностей электрического поля. В настоящей работе влияние малых радиусов кривизны не учитывается.

При моделировании связи фундаментальных ТЕ- и ТМ-моды учитывается только влияние анизотропии материала. Такой подход справедлив, если изогнутый волновод характеризуется большим радиусом изгиба (когда моды прямого и изогнутого волновода неотличимы друг от друга). Радиус изогнутого волновода, при котором его мода неотличима от моды прямого волновода, зависит от геометрических параметров поперечного сечения и конфигурации материалов. Чтобы количественно оценить идентичность мод, необходимо вычислить интеграл перекрытия мод изогнутого и прямого волновода. Чем ближе к единице полученное значение, тем более схожи моды. При большом радиусе кривизны изогнутый волновод может рассматриваться как эквивалентный прямой [37], у которого по длине меняются элементы тензора диэлектрической проницаемости в соответствии с углом поворота системы координат вокруг оси Y (рис. 2; XYZ — кристаллографическая система координат, xuz — геометрическая):

$$\varepsilon(\theta) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}\cos^2\theta + \varepsilon_{zz}\sin^2\theta & 0 & \varepsilon_{zz}\cos\theta\sin\theta + \varepsilon_{xx}\cos\theta\sin\theta \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ \varepsilon_{zz}\cos\theta\sin\theta - \varepsilon_{xx}\cos\theta\sin\theta & 0 & \varepsilon_{xx}\sin^2\theta + \varepsilon_{zz}\cos^2\theta \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} — значения диэлектрической проницаемости вдоль осей X , Y , Z ; θ — угол поворота системы координат вокруг оси y .

Согласно уравнению (4), коэффициент связи для случая произвольной анизотропии запишется следующим образом:

$$K_{\mu\nu}(\theta) = \frac{i\omega}{4P} \iint \left\{ \left(\frac{\varepsilon_{xz}^2}{\varepsilon_{zz}} - \Delta\varepsilon_{xx} \right) E_{vx} - E_{\mu x}^* - E_{xz}E_{\nu z}E_{\mu x}^* + \varepsilon'_{zz}E_{\mu z}^* \left[\left(\frac{\varepsilon'_{zz}}{\varepsilon_{zz}} - 1 \right) E_{\nu z} - \frac{\varepsilon_{zx}}{\varepsilon_{zz}} E_{\nu x} \right] \right\} dx dy. \quad (5)$$

Коэффициент связи (2) примет вид:

$$K_{\mu\nu}(\theta) = \frac{\omega}{4iP} \iint [E_{\mu x}^* (\Delta\varepsilon_{xx}E_{\nu x} + \varepsilon_{xz}E_{\nu z}) + E_{\mu z}^* (\varepsilon_{zx}E_{\nu x} + \Delta\varepsilon_{zz}E_{\nu z})] dx dy. \quad (6)$$

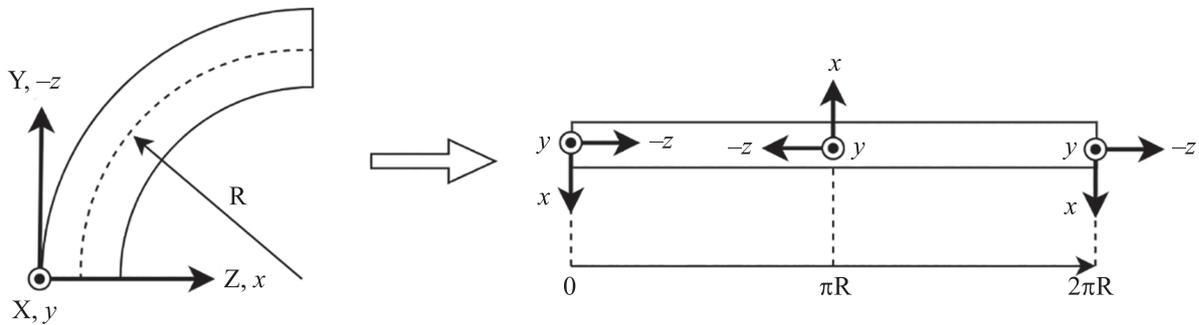


Рис. 2

Таким образом, коэффициенты связи зависят от угла поворота волновода θ . Необходимо отметить, что при расчете коэффициента связи (уравнения (5) и (6)) не учитывается y -компонент напряженности электрического поля, так как отсутствует зависимость ε_{yy} от угла, т. е. вклад в значение коэффициента связи вносят только компоненты x и z напряженностей электрических полей μ -й и ν -й моды.

Для расчета коэффициентов связи необходимо найти модовые поля и постоянные распространения μ -й и ν -й мод невозмущенного волновода, которые могут быть получены с помощью модового решателя. В настоящей статье используется модовый решатель, в котором использован метод конечных разностей с сеткой дискретизации Йи [41]. В моделировании применяется однородная сетка дискретизации размером 5×5 мкм с числом точек дискретизации 301×301 . На границе расчетной области используются граничные условия Дирихле без поглощающего слоя.

В работе рассматриваются волноводы на основе X -среза тонкопленочного ниобата лития. На рис. 3 схематически представлено поперечное сечение с параметрами: W — ширина волновода 1 мкм, h — глубина травления 0,3 мкм, H_{LN} — толщина слоя LiNbO_3 0,6 мкм, H_{SiO_2} — толщина слоя SiO_2 4,7 мкм, α — угол наклона боковой стенки,

Параметры поперечного сечения канального волновода были ранее рассчитаны исходя из требования сохранения одномодового режима, а также технологических возможностей имеющегося производственного оборудования [42]. В процессе

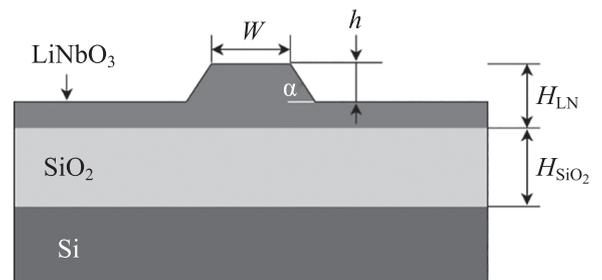


Рис. 3

моделирования варьировались наклон боковой стенки от 60 до 90° и материал покровного слоя (воздух и SiO₂) с целью оценки влияния данных параметров на гибридизацию мод и перекачку мощности между модами.

Результаты. С целью вычисления эффективных показателей преломления и распределения полей фундаментальных ТЕ- и ТМ-мод было проведено моделирование волноводов с вариацией угла наклона α боковых стенок и материала покровного слоя для диапазона длин волн от 1,5 до 1,6 мкм. Зависимости эффективных показателей преломления найденных фундаментальных мод (сплошные кривые соответствуют ТЕ-модам, пунктир — ТМ-модам) в волноводе с покровным слоем из SiO₂ и воздуха показаны на рис. 4, а и б соответственно.

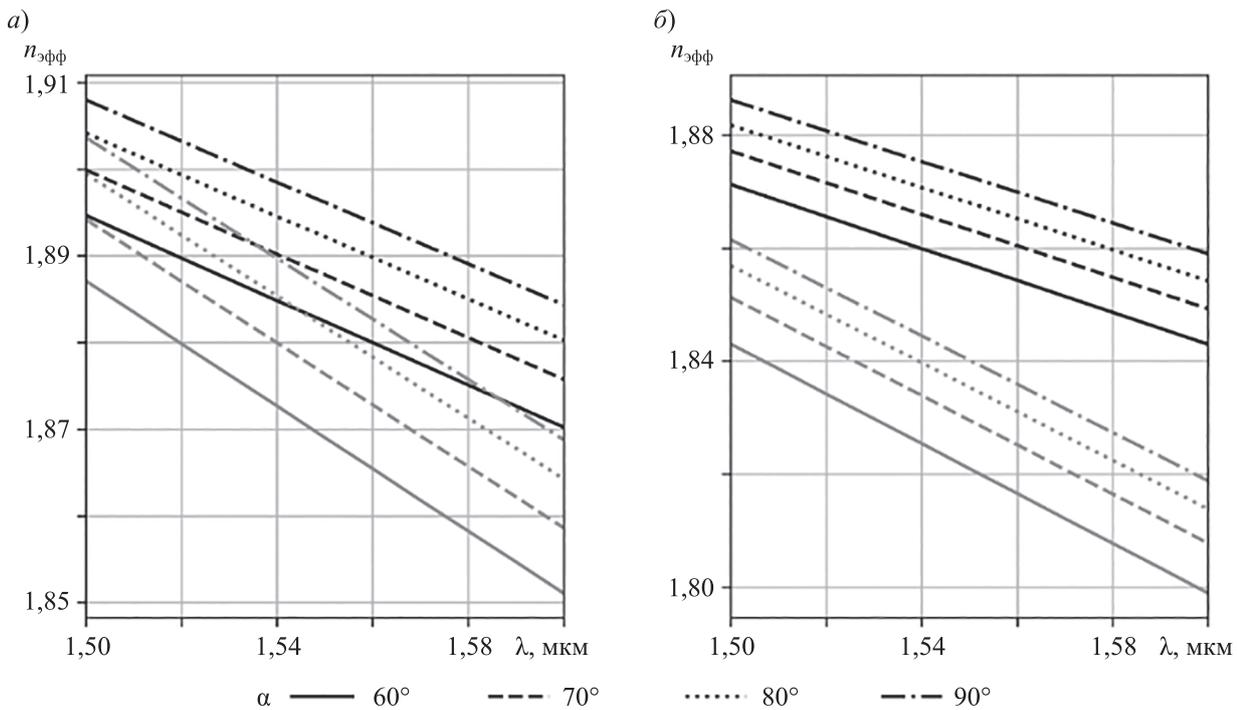


Рис. 4

Из графиков видно, что при рассматриваемых конфигурациях поперечного сечения модовой гибридизации не происходит, разница между эффективными показателями преломления ТЕ- и ТМ-мод возрастает с увеличением длины волны в волноводах. Известно, что для эффективного обмена мощностью между модами необходимо, чтобы их постоянные распространения были близки по значению [43]. Однако равенство эффективных показателей преломления (ЭПП) мод в исходном волноводе не гарантирует одинаковой эффективности обмена мощностью между модами на всей длине изогнутого волновода. Это связано с зависимостью коэффициента связи и постоянных распространения от угла поворота волновода вследствие анизотропии кристалла ниобата лития. Поэтому зависимость ЭПП мод от угла поворота волновода должна быть учтена в уравнениях связанных мод с помощью включения в уравнения собственных коэффициентов связи:

$$\frac{da_{\text{TM}}}{dz} = -i\beta_{\text{TM}}a_{\text{TM}} + K_{\text{TM-TM}}a_{\text{TM}} + K_{\text{TM-TE}}a_{\text{TE}},$$

$$\frac{da_{\text{TE}}}{dz} = -i\beta_{\text{TE}}a_{\text{TE}} + K_{\text{TE-TE}}a_{\text{TE}} + K_{\text{TE-TM}}a_{\text{TM}},$$

где a_{TM} , a_{TE} — комплексные амплитуды фундаментальных мод ТМ и ТЕ соответственно; β_{TM} — постоянная распространения ТМ-моды, β_{TE} — постоянная распространения ТЕ-моды; $K_{\text{TM-TE}}$, $K_{\text{TE-TM}}$ — коэффициенты связи фундаментальных мод ТМ и ТЕ между собой;

K_{TE-TE} — собственный коэффициент связи TE-моды, K_{TM-TM} — собственный коэффициент связи TM-моды. Коэффициенты K_{TE-TE} , K_{TM-TM} отражают изменение постоянной распространения вследствие изменения тензора диэлектрической проницаемости: $\Delta\beta = 1/i * K_v$ (здесь v означает либо TE-, либо TM-моду).

Таким образом, для каждой длины волны и каждой конфигурации поперечного сечения волновода находились изменения постоянных распространения TE- и TM-мод и коэффициенты связи между TE- и TM-модами для углов поворота волновода от 0 до 360° (все графики ниже по тексту будут приводиться для $\theta = 0-180^\circ$, так как они симметричны относительно точки 180°). Также для каждого случая рассчитывался коэффициент фазового рассогласования δ , качественно показывающий изменение эффективности связи между модами в зависимости от угла поворота волновода:

$$\delta = \frac{\beta_{TE} + \Delta\beta_{TE} - \beta_{TM} - \Delta\beta_{TM}}{2}$$

На рис. 5 приведены зависимости изменения ЭПП от угла поворота волновода с воздушным покровным слоем и углом наклона боковой стенки 90°. Кривые, лежащие в положительной полуплоскости (черный цвет), соответствуют TE-модам, кривые, лежащие в отрицательной полуплоскости (серый цвет), — TM-модам.

На рис. 6 приведены зависимости изменения ЭПП от угла поворота волновода с покровным слоем из SiO₂ и углом наклона боковой стенки 90°. Кривые, лежащие в положительной полуплоскости (черный цвет), соответствуют TE-модам, кривые, лежащие в отрицательной полуплоскости (серый цвет), — TM-модам.

Из рис. 5 и 6 видно, что изменение ЭПП равно нулю для углов 0 и 180°, что соответствует волноводу, расположенному вдоль кристаллографической оси Y (волновод, который в настоящей статье выбран базовым для расчетов с помощью теории связанных мод). Максимальное изменение ЭПП соответствует углам 90 и 270° — это участки волноводов, расположенные вдоль кристаллографической оси Z. Изменение ЭПП фундаментальных TE- и TM-мод слабо зависит от угла наклона боковых стенок, максимальная разница не превышает 0,001 (покровный слой — SiO₂) и 0,002 (покровный слой — воздух), поэтому графики рис. 5 и 6 были приведены только для $\alpha = 90^\circ$.

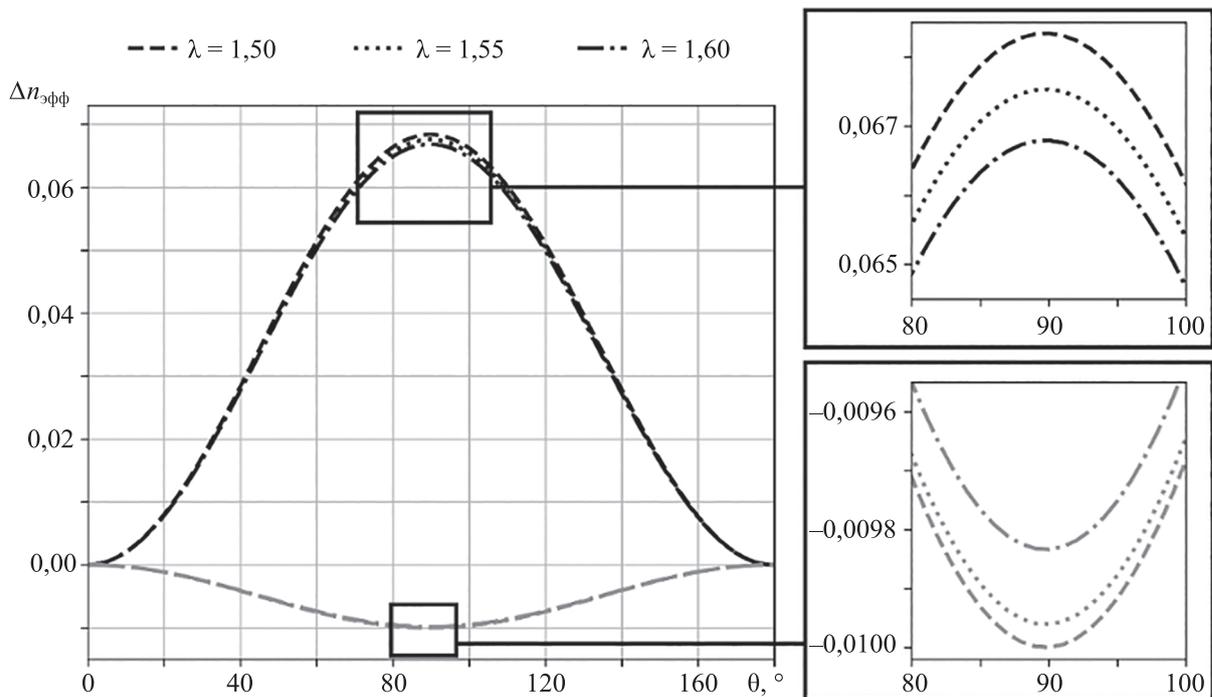


Рис. 5

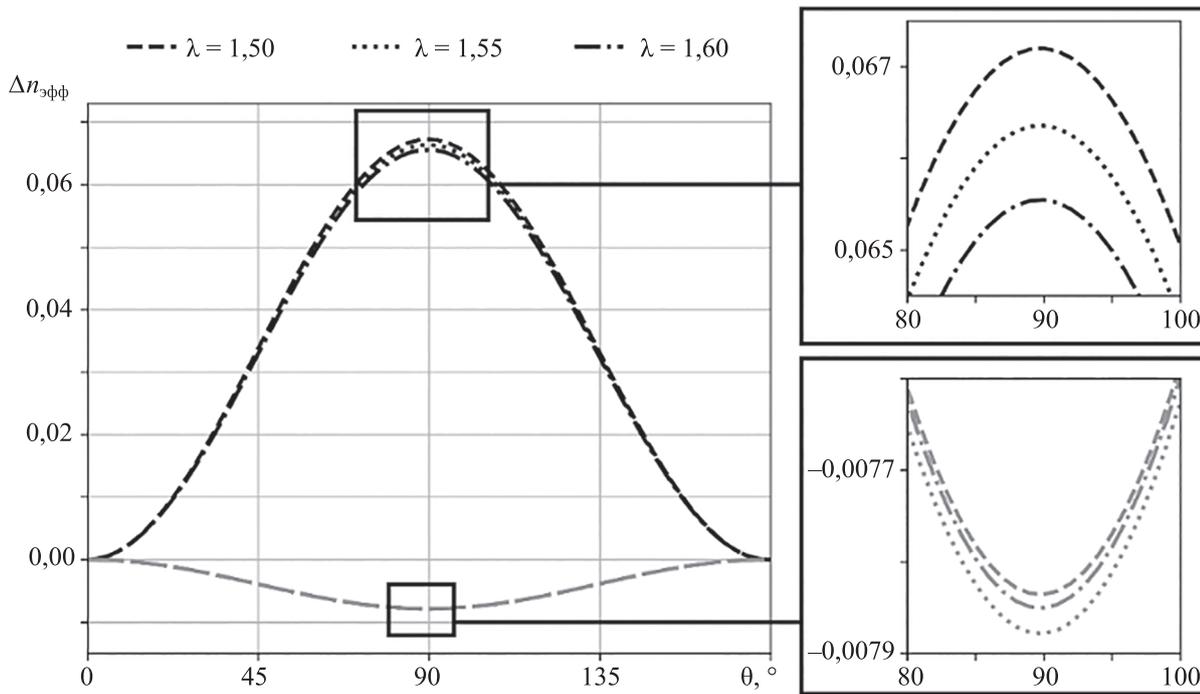


Рис. 6

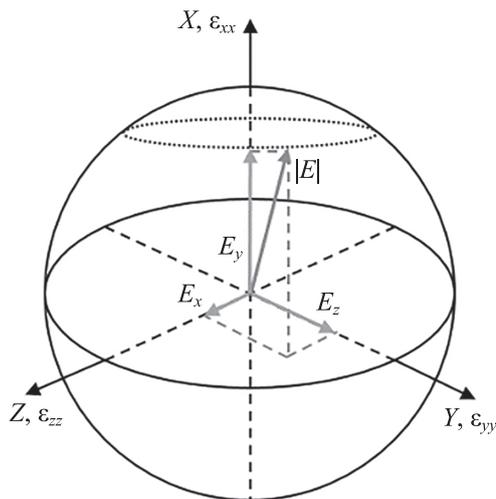


Рис. 7

Изменение ЭПП коррелирует с величиной компонентов вектора напряженности электрического поля и тензором диэлектрической проницаемости. В общем случае в канальных волноводах распространяются гибридные моды (напряженность электрического поля имеет три ненулевых компонента), поэтому каждая мода всегда будет иметь проекции напряженности электрического поля на каждую кристаллографическую ось (рис. 7). Это приводит к тому, что изменение постоянной распространения будет определяться всеми ненулевыми элементами тензора диэлектрической проницаемости.

Далее были рассчитаны коэффициенты фазового рассогласования. На рис. 8 приведены зависимости фазового рассогласования между ТЕ- и ТМ-модами от угла поворота волновода с углом наклона боковых стенок 90° и покровным слоем SiO_2 .

На рис. 9 показаны зависимости фазового рассогласования между ТЕ- и ТМ-модами от угла поворота волновода с углом наклона боковых стенок 90° и с воздушным покровным слоем.

Моды имеют близкие по значению эффективные показатели преломления и слабое фазовое рассогласование при $\theta \sim 0$, что обуславливает возможность обмена мощностью между модами. Однако фазовое рассогласование быстро нарастает с увеличением угла поворота, что должно приводить к ослаблению связи. Необходимо отметить, что в общем случае модовая гибридизация может и не наблюдаться. Также из графиков видно, что зависимость фазового рассогласования от длины волны в выбранных пределах достаточно слабая и не превышает 0,01 (см. рис. 9). Фазовое рассогласование фундаментальных ТЕ- и ТМ-мод слабо зависит от угла наклона боковых стенок, максимальная разница составила 0,001 как для воздушного покровного слоя, так и для покровного слоя из SiO_2 , поэтому графики рис. 8 и 9 были приведены только для $\alpha = 90^\circ$.

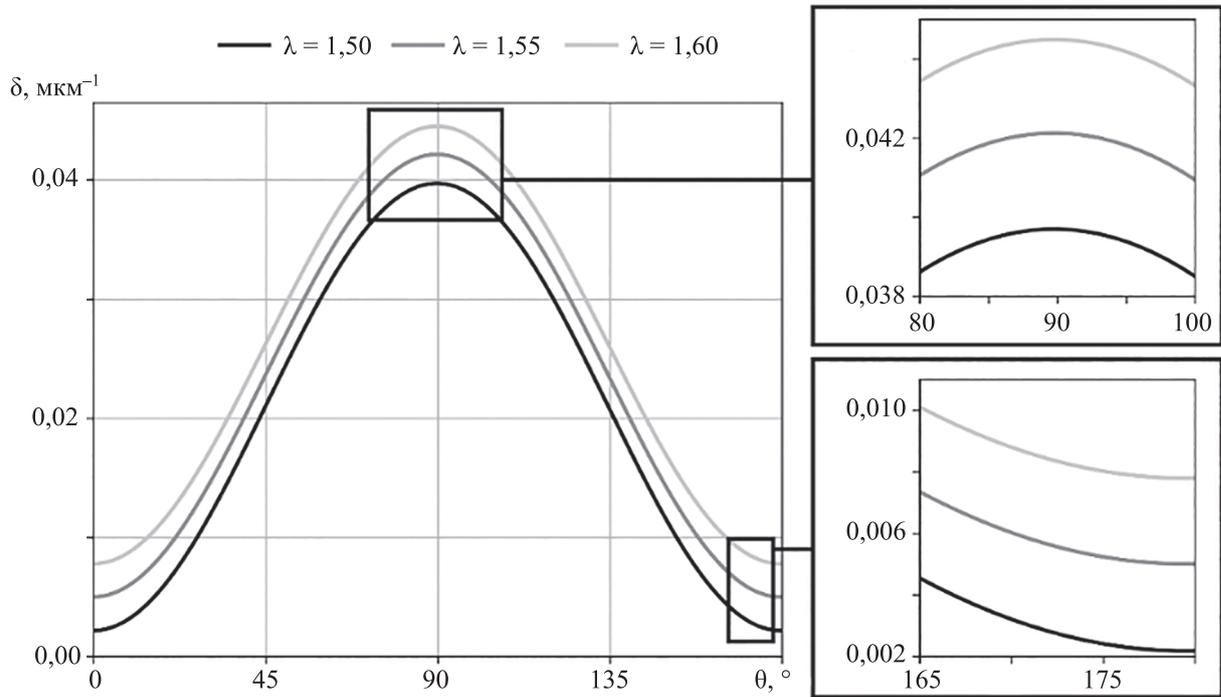


Рис. 8

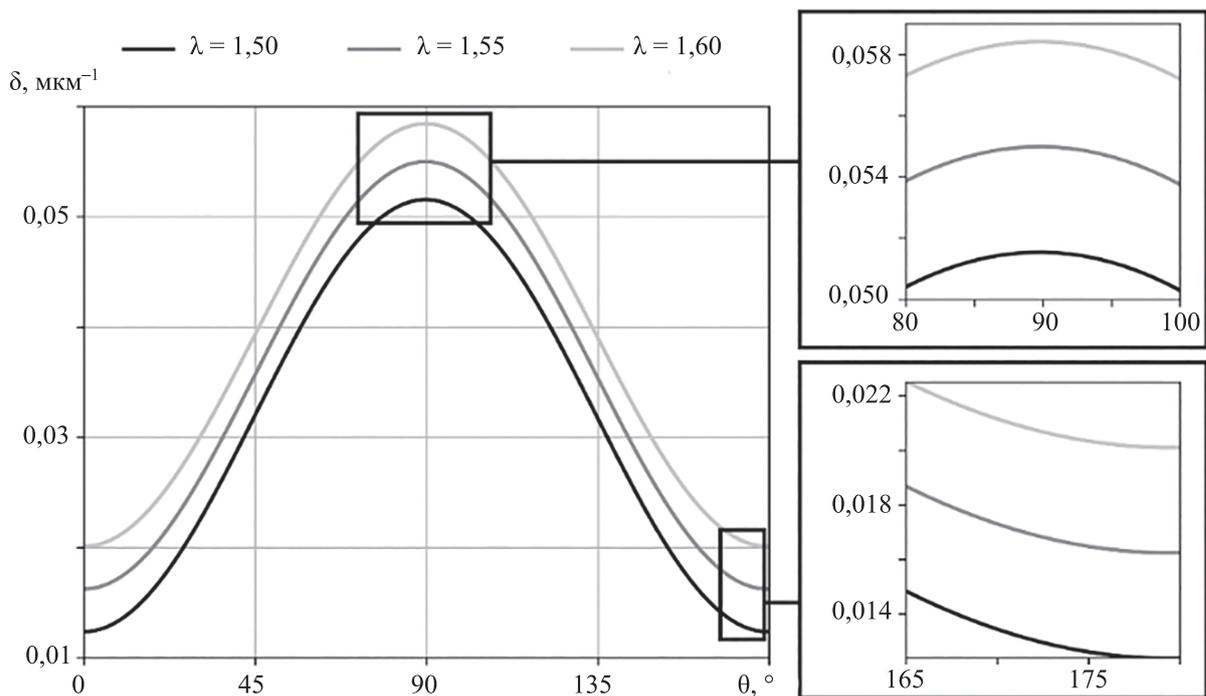


Рис. 9

На рис. 10 представлены зависимости модуля коэффициента связи от угла поворота волноводов с углом наклона боковых стенок 60 и 90° и покровным слоем из SiO₂. Точками обозначены результаты вычисления коэффициента связи по формуле (5), сплошные кривые — по формуле (6).

На рис. 11 представлены зависимости модуля коэффициента связи от угла поворота волноводов с углом наклона боковых стенок 60 и 90° и воздушным покровным слоем. Точками обозначены результаты вычисления коэффициента связи по формуле (5), сплошные линии — (6).

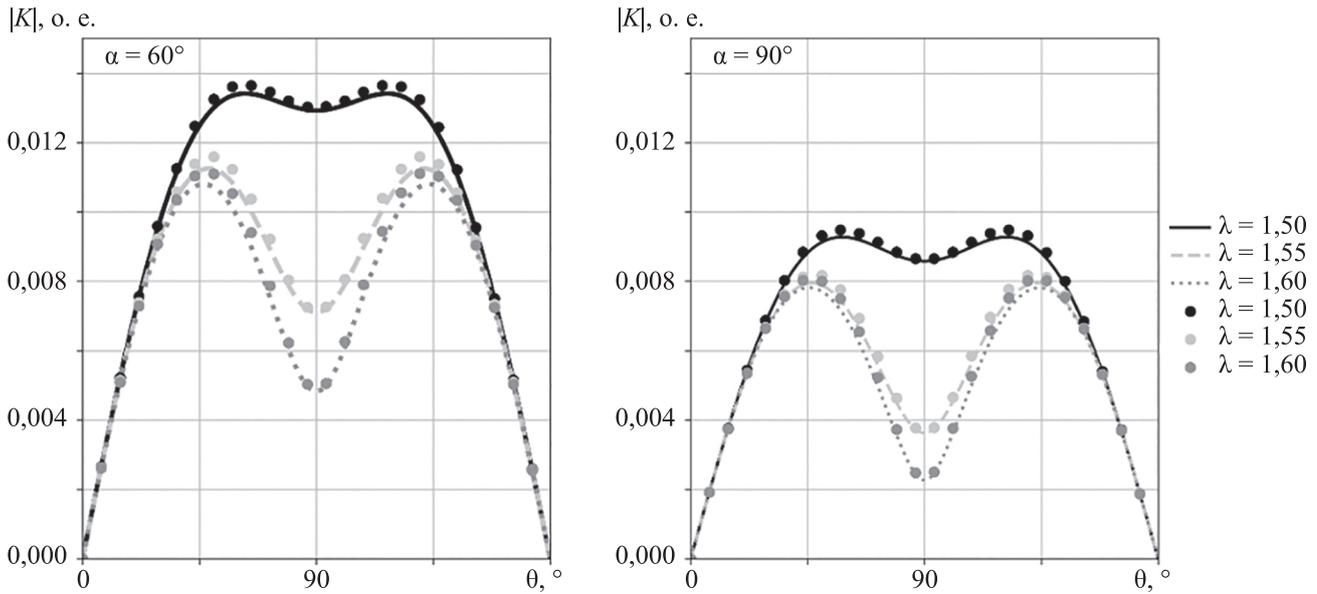


Рис. 10

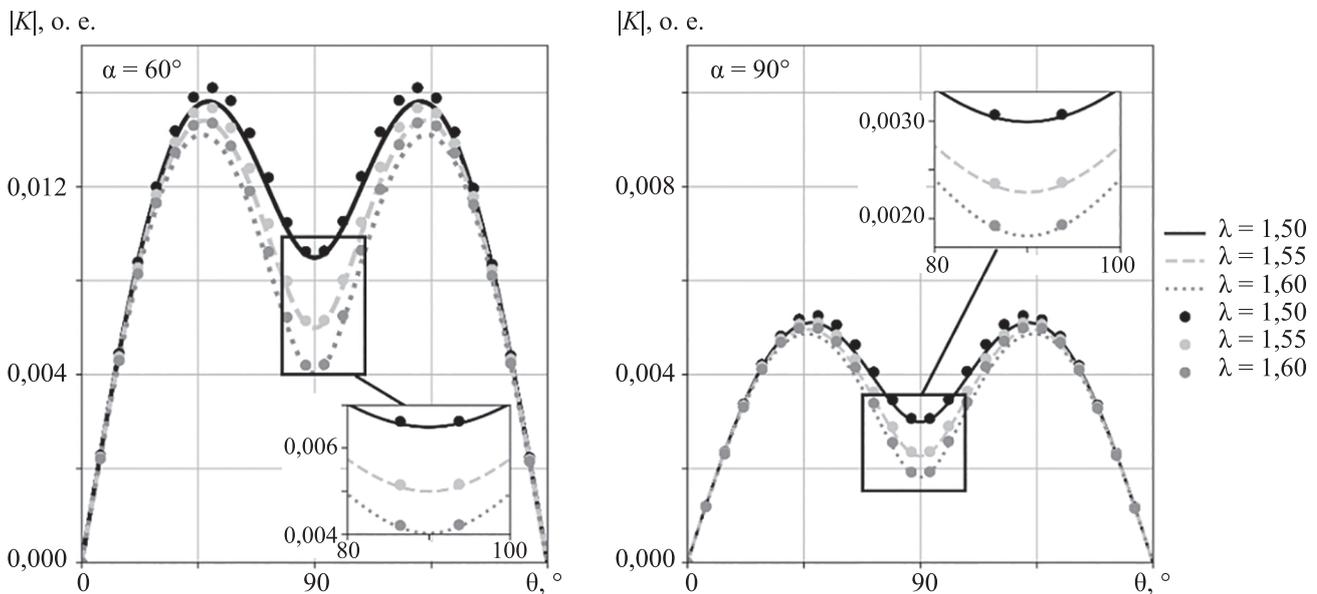


Рис. 11

Зависимости для углов наклона боковой стенки 70 и 80° схожи с зависимостями для $\alpha = 60$ и 90° . Величина модулей коэффициентов связи в диапазоне $\theta = 40\text{--}140^\circ$ зависит от длины волны и материала покровного слоя. При угле поворота 90° уравнения (5) и (6) будут содержать только диагональные компоненты тензора диэлектрической проницаемости:

$$K_{\mu\nu}(90^\circ) = \frac{\omega}{4iP} \iint [E_{\mu x}^* \Delta \epsilon_{xx} E_{\nu x} + E_{\mu z}^* \Delta \epsilon_{zz} E_{\nu z}] dx dy,$$

$$K_{\mu\nu}(90^\circ) = \frac{i\omega}{4P} \iint \left\{ -\Delta \epsilon_{xx} E_{\nu x} E_{\mu z}^* + \epsilon'_{zz} E_{\mu z}^* \left(\frac{\epsilon'_{zz}}{\epsilon_{zz}} - 1 \right) E_{\nu z} \right\} dx dy.$$

Коэффициент связи в данном случае будет чисто мнимым, и его величина будет определяться суммой компонентов x и z . Так как $\Delta \epsilon_{xx}$ и $\Delta \epsilon_{zz}$ по модулю равны, то величина компонентов x и z коэффициента связи будет определяться амплитудами компонентов напряженностей элек-

трических полей ТЕ- и ТМ-мод. При этом для рассматриваемых волноводов вклад компонента x в коэффициент связи на порядок больше, чем z . Это следует из того, что рассматриваемые моды преимущественно поляризованы вдоль поперечных осей и характеризуются малым значением z -компонента вектора напряженности электрического поля на ось Z . Таким образом, величина коэффициента связи в окрестности угла 90° определяется в основном x -компонентами напряженностей ТЕ- и ТМ-мод.

Уравнения связанных мод решались методом Рунге–Кутты четвертого порядка. Начальные условия определяли амплитуды ТЕ- и ТМ-мод, которые были равны 1 и 0. В моделировании рассматривался кольцевой волновод, в который излучение вводится вдоль кристаллографической оси Y . На рис. 12 приведены результаты моделирования перекачки мощности из ТЕ-моды в ТМ-моду в волноводах с покровным слоем из SiO_2 (рис. 12, *a*) и воздуха (*б*) с радиусом изгиба 50 мкм (длина волновода $L = 314$ мкм).

Из рис. 12, *a* видно, что максимальная доля мощности, которая перекачивается в ТМ-моду, составляет около 8 % от входной мощности, при этом наибольший обмен мощностью происходит при углах поворота волновода $180\text{--}360^\circ$ ($L = 150\text{--}314$ мкм). На рис. 12, *б* изображены результаты моделирования перекачки мощности из ТЕ-моды в ТМ-моду в волноводах с воздушным покровным слоем. В данном случае доля мощности ТМ-моды не превышает 1 %, что объясняется существенной изначальной разницей значений ЭПП рассматриваемых мод.

Полученные результаты показывают, что максимальная перекачка при $L = 314$ мкм смещается в длинноволновую область при увеличении угла наклона боковых стенок. Для случая покровного слоя из SiO_2 смещение максимума перекачки из окрестности длины волны 1,55 мкм составляет 34 нм (рис. 13, *a*). В случае волновода с воздушным покровным слоем максимум перекачки смещается из окрестности длины волны 1,52 мкм на 20 нм (рис. 13, *б*).

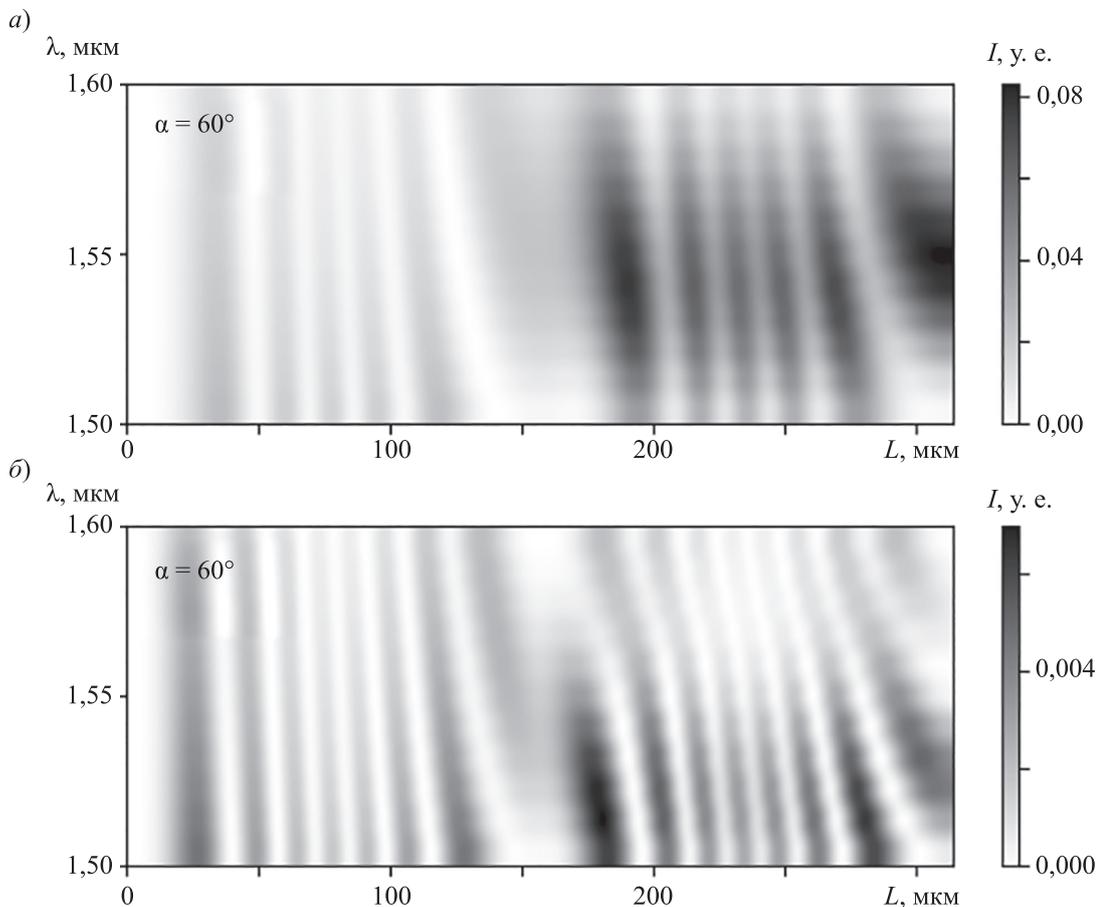


Рис. 12

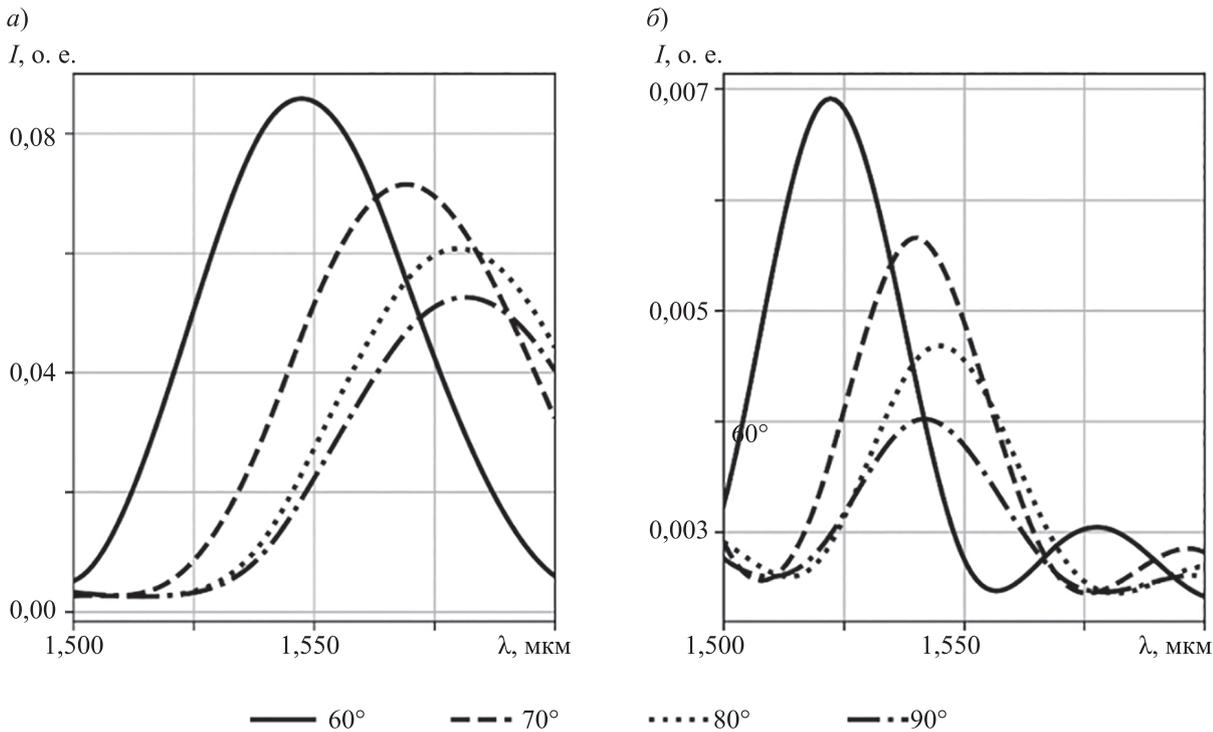


Рис. 13

В настоящей статье проанализировано межмодовое взаимодействие в изогнутых канальных волноводах на основе X-среза тонкопленочного ниобата лития с помощью теории связанных мод. При моделировании использовался метод на основе ТСМ, в котором коэффициент связи определялся для двух случаев анизотропии — произвольной и малой. При рассмотрении только материальной анизотропии оба случая дают почти эквивалентные результаты при вычислении коэффициентов связи (максимальная разница составила сотые доли процента). Было показано, что вследствие наличия анизотропии кристалла фазовое рассогласование между модами является переменной величиной, поэтому гибридизация мод наблюдается только для отдельных углов поворота волновода. Вид зависимости коэффициента связи фундаментальных ТЕ- и ТМ-мод от угла поворота волновода, прежде всего, наследуется от вида зависимости тензора диэлектрической проницаемости, но также определяется амплитудами компонентов x и z напряженностей электрического поля мод, это, как следствие, выражается в величине коэффициента связи для углов изгиба волновода в окрестности 90° . Перекачка мощности в рассматриваемых волноводах является сравнительно сильной только для волноводов с покровным слоем из SiO_2 и максимальными значениями от 5 до 8 % от входной мощности. В случае волноводов с покровным слоем из воздуха моды практически не обменивались мощностью, максимальное значение составило около 0,6 %. Необходимо отметить, что для больших, чем 50 мкм, радиусов кривизны величина перекачки мощности в ТМ-моду будет ниже [21]. Также в волноводах наблюдается смещение максимума перекачки из области коротких длин волн в область больших длин волн при увеличении угла наклона боковых стенок. Для волновода с покровным слоем из SiO_2 смещение составило 34 нм, а для волновода с воздушным покровным слоем — 20 нм. Таким образом, в случае распространения по волноводам излучения с широким спектром необходимо учитывать неоднородность перекачки для разных длин волн при проектировании отдельных элементов и систем на их основе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гилев Д. Г., Журавлев А. А., Москалев Д. Н., Чувызгалов А. А., Криштон В. В. Характеристики различных чувствительных элементов миниатюрного резонансного оптического гироскопа // Оптический журнал. 2022. Т. 89, № 4. С. 59–69.
2. Горбунов Г. Г., Еськов Д. Н., Паршин М. А., Родыгин И. В. Использование современных технологий при создании оптико-электронных систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2021. Т. 64, № 2. С. 126–136.
3. Радзиевская Т. А., Ламкин И. А., Тарасов С. А., Иванов Н. Н. Технологические способы снижения факторов роста поверхностных дефектов полимерных планарных оптических волноводов // Изв. вузов. Приборостроение. 2021. Т. 64, № 6. С. 469–476.
4. Zhu D., Shao L., Yu M., Cheng R., Desiatov B., Xin C. J., Hu Y., Holzgrafe J. et al. Integrated photonics on thin-film lithium niobate // *Advances in Optics and Photonics*. 2021. Vol. 13, N 2. P. 242–352. <https://doi.org/10.1364/AOP.411024>.
5. Wu J., Ma H., Yin P., Ge Y., Zhang Y., Li L., Zhang H., Lin H. Two-dimensional materials for integrated photonics: recent advances and future challenges // *Small Science*. 2021. Vol. 1, N 4. P. 2000053. DOI: 10.1002/smssc.202000053.
6. Bettotti P. Hybrid materials for integrated photonics // *Advances in Optics*. 2014. Vol. 2014. <https://doi.org/10.1155/2014/891395>.
7. Thylén L., Wosinski L. Integrated photonics in the 21st century // *Photonics Research*. 2014. Vol. 2, N 2. P. 75–81. <https://doi.org/10.1364/PRJ.2.000075>.
8. Bogdanov S., Shalaginov M. Y., Boltasseva A., Shalaev V. M. Material platforms for integrated quantum photonics. *Optical Materials Express*. 2017. Vol. 7, N 1. P. 111–132. <https://doi.org/10.1364/OME.7.000111>.
9. Li N., Ho C. P., Zhu S., Fu Y. H., Zhu Y., Lee L. Y. T. Aluminium nitride integrated photonics: a review // *Nanophotonics*. 2021. Vol. 10, N 9. P. 2347–2387. <https://doi.org/10.1515/nanoph-2021-0130>.
10. Heck M. J., Bauters J. F., Davenport M. L., Spencer D. T., & Bowers J. E. Ultra-low loss waveguide platform and its integration with silicon photonics // *Laser & Photonics Reviews*. 2014. Vol. 8, N 5. P. 667–686. DOI 10.1002/lpor.201300183.
11. Tran M. A., Huang D., Komljenovic T., Peters J., Malik A., & Bowers J. E. Ultra-low-loss silicon waveguides for heterogeneously integrated silicon/III-V photonics // *Applied Sciences*. 2018. Vol. 8, N 7. P. 1139. DOI:10.3390/app8071139.
12. Arizmendi L. Photonic applications of lithium niobate crystals // *Physica Status Solidi (a)*. 2004. Vol. 201, N 2. P. 253–283. DOI 10.1002/pssa.200303911.
13. Toney J. E. Lithium niobate photonics. Artech House, 2015.
14. Li Y., Yang Z., Chen H., Liu R., Peng J. et al. TE/TM mode electro-optic conversion based on a titanium diffusion lithium niobate waveguide with a polarization-maintained fiber structure. *Applied Optics*. 2023. Vol. 62, N 32. P. 8661–8669. <https://doi.org/10.1364/AO.505135>.
15. Kuneva M. Optical waveguides obtained via proton exchange technology in LiNbO₃ and LiTaO₃—a short review // *Intern. J. of Scientific Research in Science and Technology*. 2016. Vol. 2, N 6. P. 40–50.
16. Xie Z., Zhu S. LiNbO₃ crystals: from bulk to film // *Advanced Photonics*. 2022. Vol. 4, N 3. P. 030502–030502. <https://doi.org/10.1117/1.AP.4.3.030502>.
17. Boes A., Corcoran B., Chang L., Bowers J., Mitchell A. Status and potential of lithium niobate on insulator (LNOI) for photonic integrated circuits // *Laser & Photonics Reviews*. 2018. Vol. 12, N 4. P. 1700256. DOI: 10.1002/lpor.201700256.
18. Yang H. J., Gui L., & Sohler W. Lithium niobate-on-insulator (LNOI): status and perspectives // *Silicon Photonics and Photonic Integrated Circuits III*. SPIE, 2012. Vol. 8431. P. 268–275.
19. Lin J., Bo F., Cheng Y., Xu J. Advances in on-chip photonic devices based on lithium niobate on insulator // *Photonics Research*. 2020. Vol. 8, N 12. P. 1910–1936. <https://doi.org/10.1364/PRJ.395305>.
20. Kozlov A., Moskaev D., Salgaeva U., Bulatova A., Krishtop V., Volynstev A., Syuy A. Reactive ion etching of x-cut LiNbO₃ in an ICP/TCP system for the fabrication of an optical ridge waveguide // *Applied Sciences*. 2023. Vol. 13, N 4. P. 2097.
21. Pan A., Hu C., Zeng C., Xia J. Fundamental mode hybridization in a thin film lithium niobate ridge waveguide // *Optics express*. 2019. Vol. 27, N 24. P. 35659–35669. <https://doi.org/10.1364/OE.27.035659>.
22. Wang J., Chen P., Dai D., & Liu L. Polarization coupling of X-cut thin film lithium niobate based waveguides // *IEEE Photonics Journal*. 2020. Vol. 12, N 3. P. 1–10. DOI: 10.1109/JPHOT.2020.2995317.
23. Chen Z., Yang J., Wong W. H., Pun E. Y. B., & Wang C. Broadband adiabatic polarization rotator-splitter based on a lithium niobate on insulator platform // *Photonics Research*. 2021. Vol. 9, N 12. P. 2319–2324.
24. Kunz K. S., Luebbers R. J. The finite difference time domain method for electromagnetics. CRC press, 1993.

25. Brunetti G., Dell'Olio F., Conteduca D., Armenise M. N., & Ciminelli C. Comprehensive mathematical modelling of ultra-high Q grating-assisted ring resonators // Journal of optics. 2020. Vol. 22, N 3. P. 035802. DOI 10.1088/2040-8986/ab71eb.
26. Selleri S., Vincetti L., Zoboli M. Full-vector finite-element beam propagation method for anisotropic optical device analysis // IEEE Journal of quantum electronics. 2000. Vol. 36, N 12. P. 1392–1401. DOI: 10.1109/3.892558.
27. Xu C. L., Huang W. P., Chrostowski J., Chaudhuri S. K. A full-vectorial beam propagation method for anisotropic waveguides // Journal of Lightwave Technology. 1994. Vol. 12, N 11. P. 1926–1931. DOI: 10.1109/50.336056.
28. Kawano K., Kitoh T. Introduction to Optical Waveguide Analysis: Solving Maxwell's Equation and the Schrödinger Equation. John Wiley & Sons, 2001.
29. Xiao J., Sun X. Full-vectorial mode solver for anisotropic optical waveguides using multidomain spectral collocation method // Optics Communications. 2010. Vol. 283, N 14. P. 2835–2840. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2010.03.057>.
30. Fallahkhair A. B., Li K. S., Murphy T. E. Vector finite difference modesolver for anisotropic dielectric waveguides // Journal of lightwave technology. 2008. Vol. 26, N 11. P. 1423–1431. DOI: 10.1109/JLT.2008.923643.
31. Snyder A. W. et al. Optical waveguide theory. London: Chapman and hall, 1983. 738 p.
32. Pollock C. R., Lipson M. Integrated photonics. Kluwer Academic, Springer, 2003. 376 p.
33. Ushakov N. A., Markvart A. A., Petrov A. V., Liokumovich L. B. Application of pairs of coupled microresonators for control of optical radiation: theoretical analysis // Applied photonics. 2023. Vol. 6. P. 78–91. <http://doi.org/10.15593/2411-4375/2023.6.6>.
34. Qiu Y., Sheng Y. Fiber bragg grating modeling. Center for Optics, Photonics and Laser. Laval University Ste-Foy, Quebec, 2000.
35. Garmire E., Hammer J. M., Kogelnik H., Zernike F. Integrated optics. Springer Science & Business Media, 2013. 318 p.
36. Lui W. W., Huang W. P. Polarization rotation in semiconductor bending waveguides: A coupled-mode theory formulation // Journal of lightwave technology. 1998. Vol. 16, N 5. P. 929. DOI: 10.1109/50.669050.
37. Cortes-Herrera L., He X., Cardenas J., Agrawal G. P. Coupled-mode theory of the polarization dynamics inside a microring resonator with a uniaxial core // Physical Review A. 2021. Vol. 103, N 6. P. 063517. DOI: 10.1103/PhysRevA.103.063517.
38. Čtyroký J. Analysis of polarization effects in near-Z-axis Ti: LiNbO₃ devices // Journal of optical communications. 1993. Vol. 14, N 1. P. 32–38.
39. Moskalev D., Kozlov A., Salgaeva U., Krishtop V., Perminov A. V., Venediktov V. A. Semi-Analytical Method for the S-Parameter Calculations of an N×M Multimode Interference Coupler // Photonics, MDPI. 2023. Vol. 10, N 11. P. 1260. <https://doi.org/10.3390/photonics10111260>.
40. Москалев Д. Н. Моделирование многомодового интерференционного делителя 2×2 // Прикладная фотоника. 2023. Т. 10, № 8. С. 17–28.
41. Zhu Z., Brown T. G. Full-vectorial finite-difference analysis of microstructured optical fibers // Optics express. 2002. Vol. 10, N 17. P. 853–864. DOI: 10.1364/OE.10.000853.
42. Moskalev D., Kozlov A., Salgaeva U., Krishtop V., Volynstev A. Applicability of the Effective Index Method for the Simulation of X-Cut LiNbO₃ Waveguides // Applied Sciences. 2023. Vol. 13, N 11. P. 6374. <https://doi.org/10.3390/app13116374>.
43. Huang W. P. Coupled-mode theory for optical waveguides: an overview // JOSA A. 1994. Vol. 11, N 3. P. 963–983. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.11.000963>.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Дмитрий Николаевич Москалев

— аспирант; Пермская научно-производственная приборостроительная компания, Научно-исследовательский институт радиофотоники и оптоэлектроники, Пермский государственный национальный исследовательский университет, кафедра нанотехнологий и микросистемной техники; вед. инженер-исследователь, ассистент;
E-mail: moskalevdn@pnppk.ru

Евгений Дмитриевич Вобликов

— магистр; Пермская научно-производственная приборостроительная компания, Научно-исследовательский институт радиофотоники и оптоэлектроники; начальник лаборатории; E-mail: voblikov@pnppk.ru

- Виктор Владимирович Криштон** — докт. физ.-мат. наук, профессор; Пермская научно-производственная приборостроительная компания, Научно-исследовательский институт радиофотоники и оптоэлектроники, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, кафедра нанотехнологий и микросистемной техники, Пермский государственный национальный исследовательский университет, кафедра общей физики; главн. науч. сотр., профессор; E-mail: Krishtop@pnppk.ru
- Виталий Александрович Максименко** — канд. физ.-мат. наук, доцент; Пермская научно-производственная приборостроительная компания, Научно-исследовательский институт радиофотоники и оптоэлектроники, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, кафедра общей физики; доцент; E-mail: mva30@mail.ru
- Анатолий Борисович Волынец** — докт. физ.-мат. наук, профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, кафедра нанотехнологий и микросистемной техники; зав. кафедрой; E-mail: klemluk_g_v@gmail.ru

Поступила в редакцию 03.04.2024; одобрена после рецензирования 15.04.2024; принята к публикации 19.06.2024.

REFERENCES

- Gilev D.G., Zhuravlev A.A., Moskalev D.N., Chuvyrgyzalov A.A., and Krishtop V.V. *Journal of Optical Technology*, 2022, no. 4(89), pp. 229–235.
- Gorbunov G.G., Eskov D.N., Parpin M.A., Rodygin I.V. *Journal of Instrument Engineering*, 2021, no. 2(64), pp. 126–136. (in Russ.)
- Radzievskaya T.A., Lamkin I.A., Tarasov S.A., Ivanov N.N. *Journal of Instrument Engineering*, 2021, no. 6(64), pp. 469–476. (in Russ.)
- Zhu D., Shao L., Yu M., Cheng R., Desiatov B., Xin C.J., Hu Y., Holzgrafe J. et al. *Advances in Optics and Photonics*, 2021, no. 2(13), pp. 242–352, <https://doi.org/10.1364/AOP.411024>
- Wu J., Ma H., Yin P., Ge Y., Zhang Y., Li L., Zhang H., Lin H. *Small Science*, 2021, no. 4(1), pp. 2000053, DOI: 10.1002/smssc.202000053.
- Bettotti P. *Advances in Optics*, 2014, vol. 2014, <https://doi.org/10.1155/2014/891395>.
- Thylén L., Wosinski L. *Photonics Research*, 2014, no. 2(2), pp. 75–81, <https://doi.org/10.1364/PRJ.2.000075>.
- Bogdanov S., Shalaginov M.Y., Boltasseva A., Shalaev V.M. *Optical Materials Express*, 2017, no. 1(7), pp. 111–132, <https://doi.org/10.1364/OME.7.000111>.
- Li N., Ho C.P., Zhu S., Fu Y.H., Zhu Y., Lee L.Y.T. *Nanophotonics*, 2021, no. 9(10), pp. 2347–2387, <https://doi.org/10.1515/nanoph-2021-0130>.
- Heck M.J., Bauters J.F., Davenport M.L., Spencer D.T., & Bowers J.E. *Laser & Photonics Reviews*, 2014, no. 5(8), pp. 686, DOI 10.1002/lpor.201300183.
- Tran M.A., Huang D., Komljenovic T., Peters J., Malik A., & Bowers J.E. *Applied Sciences*, 2018, no. 7(8), pp. 1139, DOI:10.3390/app8071139.
- Arizmendi L. *Physica Status Solidi (a)*, 2004, no. 2(201), pp. 253–283, DOI 10.1002/pssa.200303911.
- Toney J.E. *Lithium niobate photonics*, Artech House, 2015.
- Li Y., Yang Z., Chen H., Liu R., Peng J. et al. *Applied Optics*, 2023, no. 32(62), pp. 8661–8669, <https://doi.org/10.1364/AO.505135>.
- Kuneva M. *International Journal of Scientific Research in Science and Technology*, 2016, no. 6(2), pp. 40–50.
- Xie Z., Zhu S. *Advanced Photonics*, 2022, no. 3(4), pp. 030502–030502, <https://doi.org/10.1117/1.AP.4.3.030502>.
- Boes A., Corcoran B., Chang L., Bowers J., Mitchell A. *Laser & Photonics Reviews*, 2018, no. 4(12), pp. 1700256, DOI: 10.1002/lpor.201700256.
- Yang H., Gui J.L., & Sohler W. *Silicon Photonics and Photonic Integrated Circuits III. SPIE*, 2012, vol. 8431, pp. 268–275.
- Lin J., Bo F., Cheng Y., Xu J. *Photonics Research*, 2020, no. 12(8), pp. 1910–1936, <https://doi.org/10.1364/PRJ.395305>.
- Kozlov A., Moskalev D., Salgaeva U., Bulatova A., Krishtop V., Volyntsev A., Syuy A. *Applied Sciences*, 2023, no. 4(13), pp. 2097.
- Pan A., Hu C., Zeng C., Xia J. *Optics express*, 2019, no. 24(27), pp. 35659–35669, <https://doi.org/10.1364/OE.27.035659>.
- Wang J., Chen P., Dai D., & Liu L. *IEEE Photonics Journal*, 2020, no. 3(12), pp. 1–10, DOI: 10.1109/JPHOT.2020.2995317.
- Chen Z., Yang J., Wong W.H., Pun E.Y.B., & Wang C. *Photonics Research*, 2021, no. 12(9), pp. 2319–2324.
- Kunz K.S., Luebbers R.J. *The finite difference time domain method for electromagnetics*, CRC press, 1993.
- Brunetti G., Dell’Olio F., Conteduca D., Armenise M.N., & Ciminelli C. *Journal of optics*, 2020, no. 3(22), pp. 035802, DOI 10.1088/2040-8986/ab71eb.
- Selleri S., Vincetti L., Zoboli M. *IEEE Journal of quantum electronics*, 2000, no. 12(36), pp. 1392–1401, DOI: 10.1109/3.892558.

27. Xu C.L., Huang W.P., Chrostowski J., Chaudhuri S.K. *Journal of Lightwave Technology*, 1994, no. 11(12), pp. 1926–1931, DOI: 10.1109/50.336056.
28. Kawano K., Kitoh T. *Introduction to Optical Waveguide Analysis: Solving Maxwell's Equation and the Schrödinger Equation*, John Wiley & Sons, 2001.
29. Xiao J., Sun X. *Optics Communications*, 2010, no. 14(283), pp. 2835–2840, <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2010.03.057>.
30. Fallahkhair A.B., Li K.S., Murphy T.E. *Journal of lightwave technology*, 2008, no. 11(26), pp. 1423–1431, DOI: 10.1109/JLT.2008.923643.
31. Snyder A.W. et al. *Optical waveguide theory*, London, Chapman and hall, 1983, 738 p.
32. Pollock C.R., Lipson M. *Integrated photonics*, Kluwer Academic, Springer, 2003, 376 p.
33. Ushakov N.A., Markvart A.A., Petrov A.V., Liokumovich L.B. *Applied photonics*, 2023, vol. 6, pp. 78–91, <http://doi.org/10.15593/2411-4375/2023.6.6>.
34. Qiu Y., Sheng Y. *Fiber bragg grating modeling*. Center for Optics, Photonics and Laser, Laval University Ste-Foy, Quebec, 2000, 318 p.
35. Garmire E., Hammer J.M., Kogelnik H., Zernike F. *Integrated optics*, Springer Science & Business Media, 2013, 318 p.
36. Lui W.W., Huang W.P. *Journal of lightwave technology*, 1998, no. 5(16), pp. 929, DOI: 10.1109/50.669050.
37. Cortes-Herrera L., He X., Cardenas J., Agrawal G.P. *Physical Review A*, 2021, no. 6(103), pp. 063517, DOI: 10.1103/PhysRevA.103.063517.
38. Čtyroký J. *Journal of optical communications*, 1993, no. 1(14), pp. 32–38.
39. Moskalev D., Kozlov A., Salgaeva U., Krishtop V., Perminov A.V., Venediktov V. *Photonics*, MDPI, 2023, no. 11(10), pp. 1260, <https://doi.org/10.3390/photonics10111260>.
40. Moskalev D.N. *Applied Photonics*, 2023, no. 8(10), pp. 17–28. (in Russ.)
41. Zhu Z., Brown T.G. *Optics express*, 2002, no. 17(10), pp. 853–864, DOI: 10.1364/OE.10.000853.
42. Moskalev D., Kozlov A., Salgaeva U., Krishtop V., Volyntsev A. *Applied Sciences*, 2023, no. 11(13), pp. 6374, <https://doi.org/10.3390/app13116374>.
43. Huang W.P. *JOSA A*, 1994, no. 3(11), pp. 963–983, <https://doi.org/10.1364/JOSAA.11.000963>.

DATA ON AUTHORS

- | | |
|-----------------------------|--|
| Dmitry N. Moskalev | — Post-Graduate Student; Perm Scientific-Industrial Instrument Making Company, Research Institute of Radio Photonics and Optoelectronics; Leading Engineer-Researcher; Perm State University, Department of Nanotechnologies and Microsystem Technique; Assistant; E-mail: moskalevdn@pnppk.ru |
| Eugene D. Voblikov | — MSc; Perm Scientific-Industrial Instrument Making Company, Research Institute of Radio Photonics and Optoelectronics; Head of Laboratory; E-mail: voblikov@pnppk.ru |
| Victor V. Krishtop | — Dr. Sci., Professor; Perm Scientific-Industrial Instrument Making Company, Research Institute of Radio Photonics and Optoelectronics; Chief Researcher; Perm National Research Polytechnic University, Department of Nanotechnologies and Microsystem Technique; Professor; Perm State University, Department of General Physics; Professor; E-mail: Krishtop@pnppk.ru |
| Vitaly A. Maksimenko | — PhD, Associate Professor; Perm Scientific-Industrial Instrument Making Company, Research Institute of Radio Photonics and Optoelectronics, Perm National Research Polytechnic University, Department of General Physics; Associate Professor; E-mail: mva30@mail.ru |
| Anatoly B. Volyntsev | — Dr. Sci., Professor; Perm State University, Department of Nanotechnologies and Microsystem Technique; Head of the Department; E-mail: klemluk_g_v@gmail.ru |

Received 03.04.2024; approved after reviewing 15.04.2024; accepted for publication 19.06.2024.

**МЕТОДЫ КОМПЕНСАЦИИ ВЛИЯНИЯ РАЗЛИЧИЙ В ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ СПОСОБНОСТИ
ОБЪЕКТОВ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ КАРТ ГЛУБИН
АКТИВНО-ИМПУЛЬСНОЙ ТЕЛЕВИЗИОННОЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ****И. Д. Мусихин^{1*}, В. В. Капустин¹, А. Мовчан¹, С. А. Забуга¹, Е. С. Познахарев²**¹ Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Томск, Россия² Институт оптики атмосферы им. В. Е. Зуева Сибирского отделения Российской академии наук,
Томск, Россия* ilia.d.musikhin@tusur.ru

Аннотация. Рассмотрено влияние отражательной способности объектов на точность построения нормированной карты глубин пространства с использованием активно-импульсной телевизионной измерительной системы. Приведены краткие сведения о системе, ее устройстве, принципах измерения дальности и построения карт глубин с ее помощью. В качестве материала для исследования взяты восемь видеофайлов, которые получены в результате проведения экспериментальных исследований в большой аэрозольной камере при использовании активно-импульсной телевизионной измерительной системы в режиме многозонного измерения дальности и многозонного измерения дальности с модуляцией. Предложен метод вычитания коэффициентов, обеспечивающий устранение расхождения значений относительной яркости на нормированной карте глубин между темными и светлыми объектами, находящимися на одном расстоянии от системы. Метод экспериментально апробирован. Выполнено сравнение предложенного метода и метода вычитания темного кадра по критерию минимизации среднеквадратического отклонения измеренной глубины между темными и светлыми объектами. В результате применения обоих методов достигнуто уменьшение среднеквадратического отклонения от 1,3 до 20 раз в зависимости от примененного метода минимизации и метода измерения дальности, используемого в системе. Метод вычитания коэффициентов может быть использован только в процессе постобработки, однако он показывает лучшие результаты, по сравнению с методом вычитания темного кадра, который может быть использован в режиме реального времени.

Ключевые слова: отражательная способность объектов, активно-импульсная телевизионная измерительная система, нормированная карта глубин, метод вычитания коэффициентов, метод вычитания темного кадра

Благодарность: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-79-10200 в ТУСУР.

Ссылка для цитирования: Мусихин И. Д., Капустин В. В., Мовчан А., Забуга С. А., Познахарев Е. С. Методы компенсации влияния различий в отражательной способности объектов для повышения точности построения карт глубин активно-импульсной телевизионной измерительной системой // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 8. С. 713–721. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-8-713-721.

**METHODS OF COMPENSATING FOR THE INFLUENCE OF DIFFERENCES IN THE REFLECTIVITY
OF OBJECTS TO IMPROVE THE ACCURACY OF CONSTRUCTING DEPTH MAPS USING AN ACTIVE-PULSE
TELEVISION MEASURING SYSTEM****I. D. Musikhin^{1*}, V. V. Kapustin¹, A. Movchan¹, S. A. Zabuga¹, E. S. Poznakharev²**¹ Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russia² V. E. Zuev Institute of Atmospheric Optics of the RAS, Siberian Branch, Tomsk, Russia* ilia.d.musikhin@tusur.ru

Abstract. The influence of the reflectivity of objects on the accuracy of constructing a normalized depth map of space using an active-pulse television measuring system is considered. Brief information about the system, its structure, principles of measuring range and constructing depth maps with its help is given. Eight video files obtained as a result of experimental studies in a large aerosol chamber using an active-pulse television measuring system in the multi-zone range measurement mode and multi-zone range measurement with modulation are taken as material for the study. A method for subtracting coefficients is proposed, which ensures the elimination of the discrepancy in the relative brightness values on the normalized depth map between dark and light objects located at the same distance from the system. The method is experimentally tested. A comparison of the proposed method and the method of subtracting a dark frame is performed according to the criterion of minimizing the root-mean-square deviation of the depth measurement between dark and light objects. As a result of applying both methods, the mean square deviation was reduced by 1.3 to

20 times, depending on the minimization method and the range measurement method used in the system. The coefficient subtraction method can only be used in post-processing, but it shows better results than the dark frame subtraction method, which can be used in real time.

Keywords: reflectivity of objects, active pulse television measuring system, normalized depth map, coefficient subtraction method, dark frame subtraction method

Acknowledgment: This work was supported by the grant of the Russian Science Foundation No. 21-79-10200 to TUSUR.

For citation: Musikhin I. D., Kapustin V. V., Movchan A., Zabuga S. A., Poznakharev E. S. Methods of compensating for the influence of differences in the reflectivity of objects to improve the accuracy of constructing depth maps using an active-pulse television measuring system. *Journal of Instrument Engineering*. 2024. Vol. 67, N 8. P. 713–721 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-8-713-721.

Введение. В промышленности [1–3], игровой индустрии [4, 5], навигации [6–8], при создании 3D-текстур реальных объектов [9–11] необходимо получать карты глубин для измерения размеров объектов и расстояния до них. Разработано множество устройств и методов, которые позволяют дистанционно измерять расстояния до объектов. Одним из таких устройств является активно-импульсная телевизионная измерительная система (АИ ТИС) [12]. Благодаря своим особенностям АИ ТИС измеряет расстояния до объектов, находящихся в поле зрения камеры, причем измерения возможно проводить даже при условии замутненности среды распространения оптического излучения.

Активно-импульсная телевизионная измерительная система (рис. 1) состоит из излучающего модуля, приемного модуля, а также модуля управления и обработки.

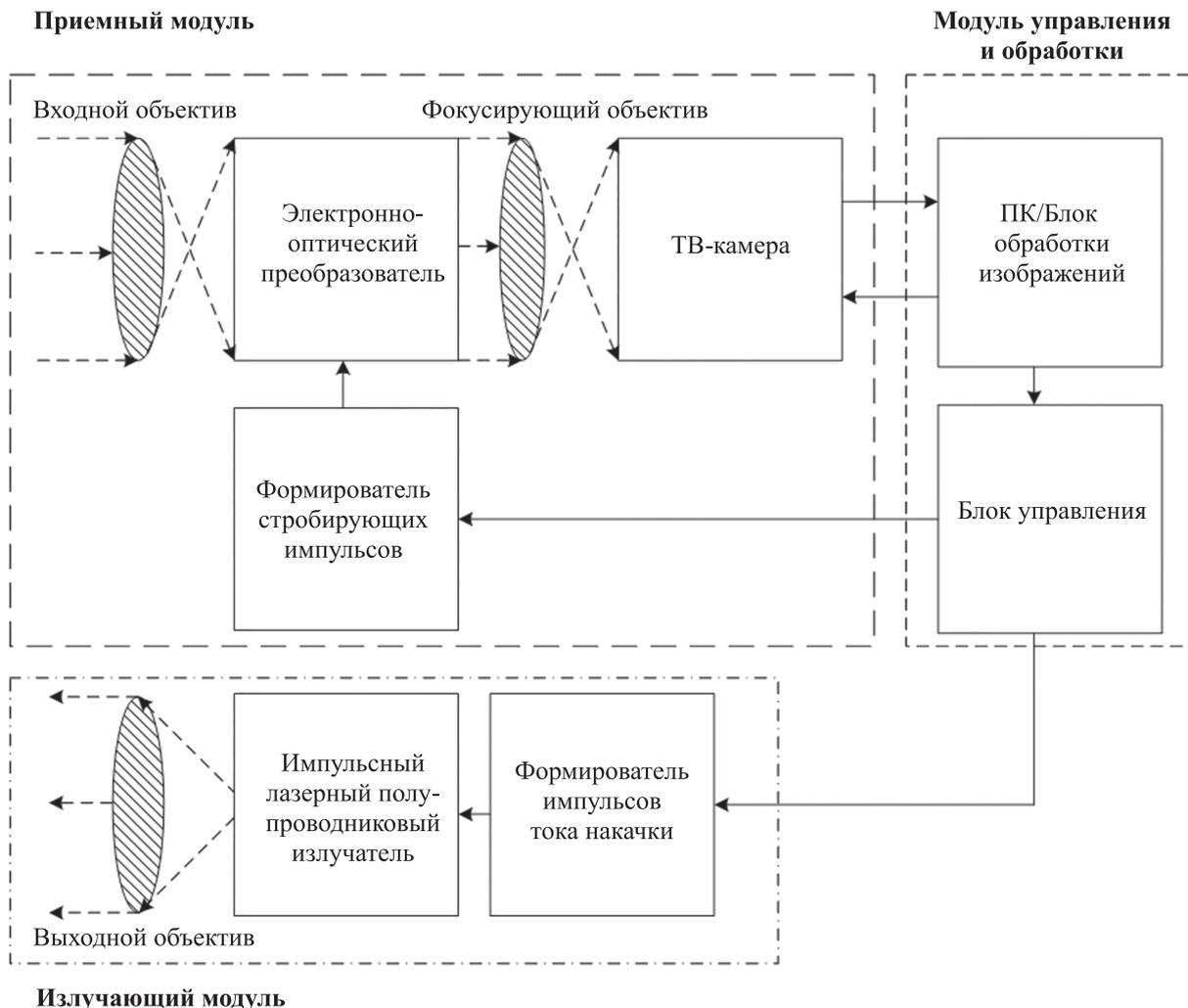


Рис. 1

Излучающий модуль содержит формирователь импульсов тока накачки, импульсный лазерный полупроводниковый излучатель (ИЛПИ) и объектив. Формирователь импульсов тока накачки управляет ИЛПИ для обеспечения требуемой интенсивности потока оптического излучения в течение заданного времени. Оптическое излучение проходит через объектив излучателя, где оно приобретает необходимый угол расходимости для освещения пространства. В качестве ИЛПИ в АИ ТИС применяются решетка лазерных диодов ИК-диапазона и оптический интегратор, необходимый для формирования равномерного поля подсвета.

Приемный модуль фотоприемника состоит из электронно-оптического преобразователя (ЭОП), перед которым расположен входной объектив, фокусирующий отраженный от наблюдаемых объектов поток оптического излучения. ЭОП выступает в роли быстродействующего затвора, а также преобразует обратный световой поток, излучаемый в невидимом глазу диапазоне частот, в видимое оптическое излучение, увеличивая его интенсивность. Световой поток, выходящий из экрана электронно-оптического преобразователя, фокусируется на матрице телевизионной камеры благодаря согласующему объективу [13].

Модуль управления и обработки позволяет принимать видеопоток с телевизионной камеры АИ ТИС и выполнять необходимую обработку видеок кадров для построения нормированной карты глубин пространства, а также накладывать на нее псевдоцвета.

ТВ-камера АИ ТИС синхронизирована через модуль управления с ЭОП. Частота кадров ТВ-камеры — 50 Гц, частота стробирования ЭОП — 5 кГц. Таким образом, за один кадр в ТВ-камере может быть накоплено до ста кадров, сформированных на экране ЭОП.

Для построения карты глубин с помощью АИ ТИС применяется многозонный метод измерения дальности (ММИД) [13, 14], который позволяет регулировать динамический диапазон определения расстояний до объектов без изменения длительности импульса подсвета пространства (ИПП). ММИД основан на использовании двух видеок кадров, полученных с использованием АИ ТИС. Данные видеок кадры содержат множество активных зон видения (АЗВ), сформированных определенным образом. Основой метода определения дальности является операция над двумя изображениями наблюдаемой сцены, где каждое изображение формируется из множества АЗВ по определенному алгоритму [15].

Результатом применения ММИД в АИ ТИС является получение нормированного изображения, в котором значения яркости пикселей соответствуют расстоянию до наблюдаемых объектов. Нормировка выполняется путем деления значения яркости пикселей в кадре, содержащем суммарную АЗВ, на значение яркости пикселей в кадре, содержащем первую АЗВ. Значение яркости после нормировки в ММИД может превышать 1 из-за разности в итоговой глубине АЗВ, т. е. на определенном расстоянии яркость объектов на кадрах с суммарной АЗВ будет выше, чем в кадрах с первой АЗВ.

Многозонный метод измерения дальности с модуляцией (ММИДМ), основанный, как и ММИД, на использовании двух видеок кадров, полученных в АИ ТИС [16], повышает эффективность использования амплитудного динамического диапазона фотоприемника, что приводит к увеличению интервала измерения дальностей.

Исследование и компенсация влияния различной отражательной способности объектов наблюдения. В качестве исходных данных были взяты видеоматериалы, полученные при проведении экспериментальных исследований в большой аэрозольной камере [17], находящейся в Институте оптики атмосферы им. В. Е. Зуева Сибирского отделения Российской академии наук (ИОА СО РАН). Большая аэрозольная камера (объем 2000 м³) предназначена для исследований закономерностей распространения лазерных пучков в моделируемых аэрозольных образованиях (дымы, туманы и пр.).

Для исследования использовались восемь видеофайлов (четыре для ММИД и четыре — для ММИДМ), снятых в большой аэрозольной камере, при использовании АИ ТИС в режиме измерения дальности методами ММИД и ММИДМ с задержками стробирования 60, 80, 90 и 100 нс. Пример кадра с увеличенной яркостью при использовании ММИД с задержкой стробирования 100 нс приведен на рис. 2.

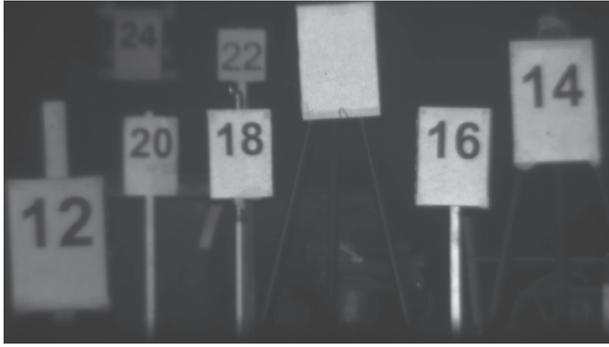


Рис. 2

Было проведено исследование влияния различной отражательной способности объектов на точность построения карт глубин пространства. В качестве инструмента для исследования использовалось специально разработанное авторами ПО [18, 19]. Был снят ряд зависимостей нормированного отношения яркостей объектов в кадре для светлых и темных объектов от расстояния до объектов. В программном обеспечении на изображениях темных и светлых объектов назначались области интереса, после чего производились накопление кадров, их

усреднение и запись в файл средних значений яркостей и их нормированных отношений. Стоит отметить, что размеры и положения областей интереса не изменялись, а количество накопленных и усредненных кадров оставалось постоянным.

В качестве светлых объектов были взяты фоновые области измерительных транспарантов, а в качестве темных — цифры, обозначающие расстояние до транспарантов. Для полученных параметров было рассчитано среднеквадратическое отклонение (СКО) нормированных отношений яркостей темных и светлых объектов

$$\text{СКО} = \sqrt{\frac{\sum_{d=12}^{24} (I_c - I_T)^2}{N}},$$

где $d = 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24$ м — расстояние от АИ ТИС до светлых и темных объектов; I_c — нормированное отношение яркостей для светлых объектов на расстоянии d ; I_T — нормированное отношение яркостей для темных объектов на расстоянии d ; N — число точек определения яркости (в нашем случае 7).

Другими словами, СКО показывает, насколько нормированные отношения яркостей для темных объектов расходятся с отношениями для светлых объектов. Пример зависимостей нормированных отношений яркостей для темных и светлых объектов от расстояния до объектов при задержке стробирования 100 нс приведен в табл. 1: видно расхождение значений, в этом и заключена проблема влияния различной отражательной способности объектов на точность построения карт глубин.

Таблица 1. Пример зависимостей нормированных отношений яркостей от расстояния до объектов при задержке стробирования 100 нс

Метод	Объект	Расстояние до объектов, м							СКО
		12	14	16	18	20	22	24	
ММИД	Светлый	0,472	0,63	0,808	0,934	1,053	1,183	1,189	0,092
	Темный	0,661	0,736	0,838	0,939	1,019	1,12	1,105	
ММИДМ	Светлый	0,423	0,432	0,426	0,461	0,486	0,492	0,569	0,128
	Темный	0,591	0,462	0,425	0,456	0,472	0,469	0,547	

При проведении измерений было замечено, что в видеофайлах уровень черного всегда не равен нулю. Это обусловлено внутренними шумами камеры и дробовыми шумами ЭОП, причем это искажение влияет сильнее на темные объекты (см. рис. 2, цифры на транспарантах) в связи с их малой яркостью.

Для минимизации влияния уровня черного и, как следствие — минимизации СКО для темных и светлых участков объекта, был предложен метод вычитания коэффициентов. Суть

данного метода заключается в вычитании вычисленных значений из числителя и знаменателя при построении нормированной карты глубин (для ММИД из суммарной и первой зоны, для ММИДМ — из зоны с модуляцией и суммарной зоны). Для подбора этих значений был разработан алгоритм, представленный на рис. 3. В этом алгоритме K_1 и K_2 — значения, вычитаемые из числителя и знаменателя.

Для анализа работоспособности предложенного метода было проведено экспериментальное сравнение с методом вычитания темнового кадра из видеопотока для корректировки уровня черного. Темновой кадр — это изображение, полученное сенсором при закрытом затворе или закрытом объективе. Такой темновой кадр по сути является изображением шума, создаваемого датчиком. В нашем случае темновой кадр представляет собой усредненный видеопоток, снятый с выключенным источником подсветки при использовании ММИД. Для ММИДМ использовался тот же темновой кадр, что и для ММИД.

Сравнительная апробация методов была выполнена на исходных видеоданных. Полученные по формуле (1) значения среднеквадратического отклонения зависимостей нормированных отношений яркостей для светлых и темных объектов от дальности сведены в табл. 2.

Графики зависимостей нормированных отношений яркостей от расстояния для ММИД с задержкой стробирования 100 нс до (а) и после обработки методами вычитания коэффициентов (б) и темнового кадра (в) приведены на рис. 4.

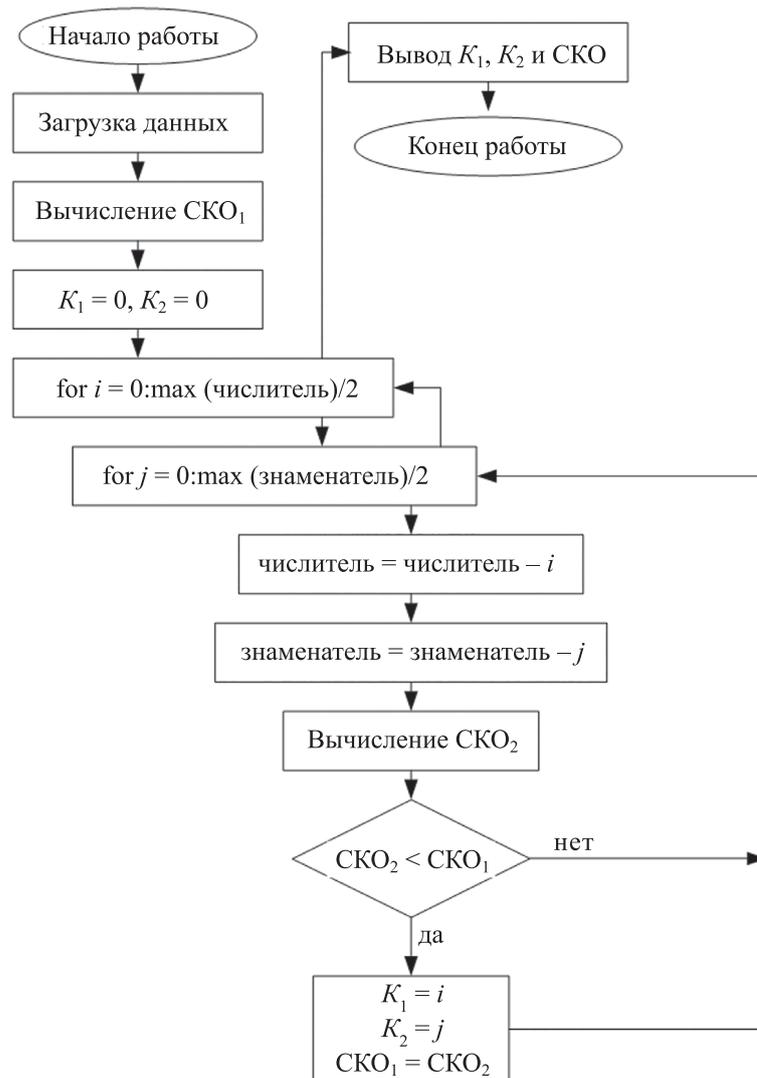


Рис. 3

Таблица 2. СКО зависимостей нормированных отношений яркостей от дальности до и после обработки

Метод	Задержка, нс	СКО		
		исходное	метод вычитания коэффициентов	метод вычитания темного кадра
ММИД	60	0,091	0,044	0,086
	80	0,065	0,026	0,06
	90	0,064	0,021	0,054
	100	0,092	0,018	0,051
ММИДМ	60	0,066	0,004	0,016
	80	0,071	0,003	0,011
	90	0,089	0,003	0,01
	100	0,128	0,002	0,015

Из экспериментальных данных, табл. 1 и 2, а также рис. 4 следует, что предварительная обработка видеокadres AI ТИС значительно снизила СКО между темными и светлыми объектами, причем в большинстве случаев наблюдается схождение двух кривых практически в одну.

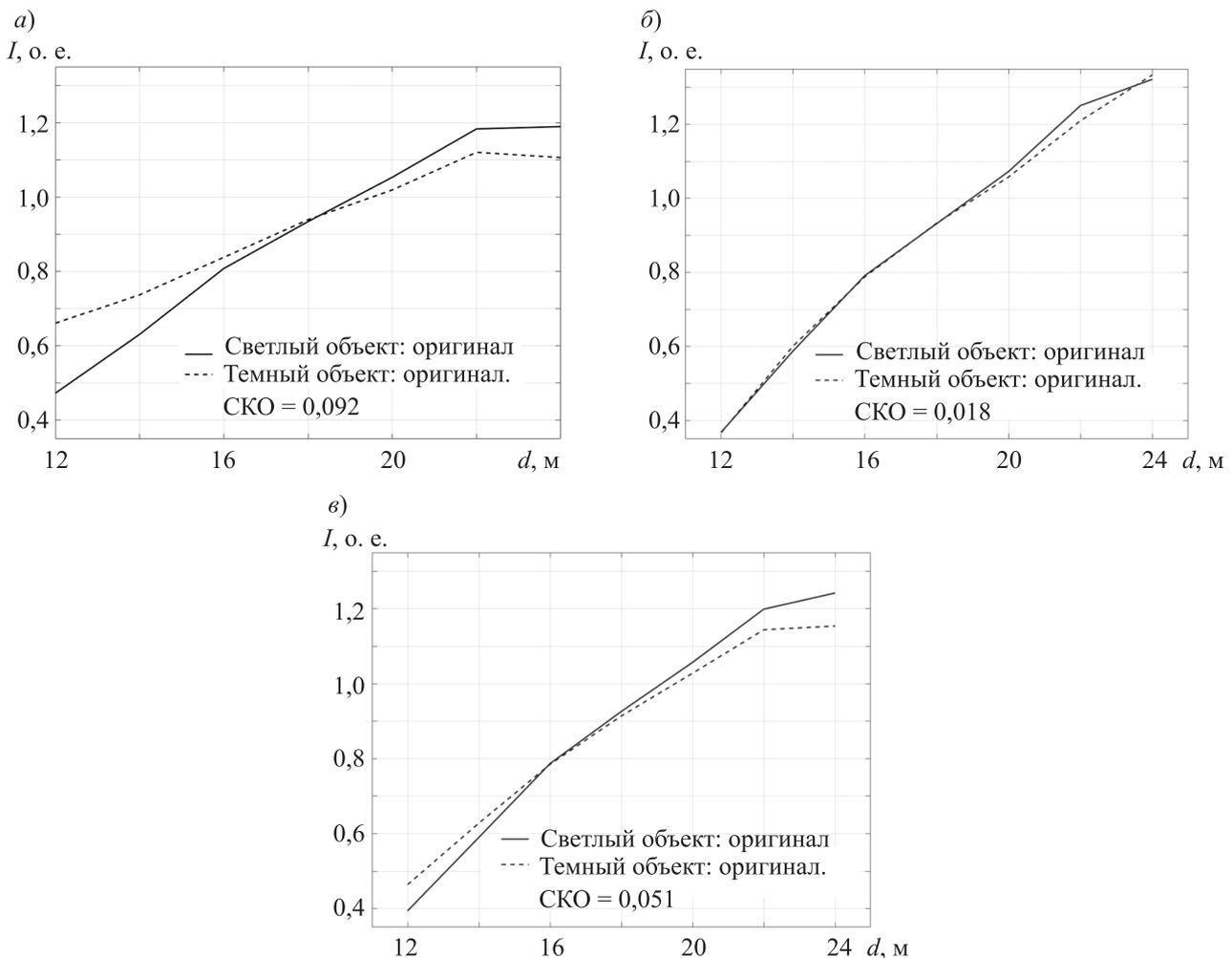


Рис. 4

На результирующей карте глубин уменьшение СКО проявляется как „размытие“ или, в идеальном случае, исчезновение цифр с транспарантов. В настоящей работе для метода вычитания коэффициентов не анализировались параметры системы. Для этого не хватает данных, так как предполагается, что подобранные коэффициенты зависят от инерционности люминофора ЭОП, шума ЭОП, шума камеры, яркости сцены и используемого метода получения карт глубин. Для визуального сравнения результатов применения методов на рис. 5 приведены карты глубин до обработки (а), после обработки методом вычитания коэффициентов (б) и после обработки методом вычитания темного кадра (в) для видеофайла, содержащего ММИД с задержкой стробирования 100 нс.

После применения метода вычитания коэффициентов на карте глубин пропадает фоновый шум, а также исчезают номера транспарантов, что также свидетельствует об успешном применении метода. После применения метода вычитания темного кадра на карте глубин черные цифры стали визуально менее заметными, но, в отличие от метода вычитания коэффициентов, осталась фоновая составляющая.

Заключение. Для повышения точности построения карт глубин пространства исследованы способы компенсации влияния различной отражательной способности объектов. Из исследований следует, что хорошо себя показал предложенный метод вычитания коэффициентов. Для ММИД применение метода вычитания коэффициентов обеспечило уменьшение СКО в среднем в 3 раза, а для ММИДМ — в 20 раз. Применение метода сократило расхождение кривых зависимостей нормированных отношений яркостей от дальности, что подтверждается численно. Визуально на карте глубин пропадает фоновый шум, а также исчезают номера транспарантов, что свидетельствует об успешном применении метода.

Метод вычитания темного кадра показал меньшую эффективность, по сравнению с методом вычитания коэффициентов. Для ММИД этот метод уменьшил СКО в среднем в 1,3 раза, для ММИДМ — в 7 раз. Визуально на карте глубин этот метод сделал черные цифры менее заметными, но, в отличие от метода вычитания коэффициентов, оставил фоновую составляющую.

Стоит отметить, что метод вычитания коэффициентов может быть использован только в процессе постобработки, тогда как метод вычитания темного кадра может быть использован для работы в режиме реального времени. В данной работе для метода вычитания коэффициентов не проводился поиск зависимостей для подобранных коэффициентов. Для поиска этих зависимостей не хватает данных, так как предполагается, что подобранные коэффициенты зависят от инерционности люминофора ЭОП, шума ЭОП, шума камеры, от яркости сцены и используемого метода получения карт глубин.

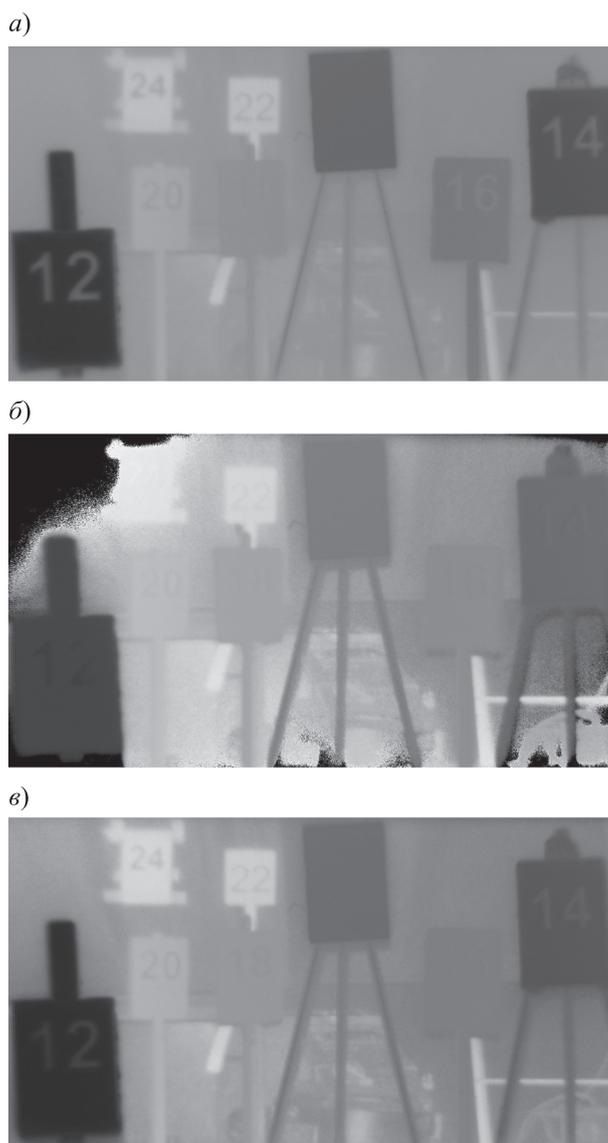


Рис. 5

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gimeno J.* et al. A new AR authoring tool using depth maps for industrial procedures // *Computers in Industry*. 2013. Vol. 64, N 9. P. 1263–1271.
2. *Devagiri J. S.* et al. Augmented Reality and Artificial Intelligence in industry: Trends, tools, and future challenges // *Expert Systems with Applications*. 2022. P. 118002.
3. *Rahimian F. P.* et al. On-demand monitoring of construction projects through a game-like hybrid application of BIM and machine learning // *Automation in Construction*. 2020. Vol. 110. P. 103012.
4. *Vijayanagar K. R., Loghman M., Kim J.* Refinement of depth maps generated by low-cost depth sensors // 2012 Intern. SoC Design Conf. (ISOCC). IEEE, 2012. P. 355–358.
5. *Yahav G., Iddan G. J., Mandelbroum D.* 3D imaging camera for gaming application // 2007 Digest of Technical Papers Intern. Conf. on Consumer Electronics. IEEE. 2007. P. 1–2.
6. *Häne C.* et al. Stereo depth map fusion for robot navigation // 2011 IEEE/RSJ Intern. Conf. on Intelligent Robots and Systems. IEEE. 2011. P. 1618–1625.
7. *Haigron P.* et al. Depth-map-based scene analysis for active navigation in virtual angiography // *IEEE Transactions on Medical Imaging*. 2004. Vol. 23, N 11. P. 1380–1390.
8. *Angelopoulos A. N.* et al. Enhanced depth navigation through augmented reality depth mapping in patients with low vision // *Scientific reports*. 2019. Vol. 9, N 1. P. 11230.
9. *Krutikova O., Sisojevs A., Kovalovs M.* Creation of a depth map from stereo images of faces for 3D model reconstruction // *Procedia Computer Science*. 2017. Vol. 104. P. 452–459.
10. *Fu Y.* et al. Texture mapping for 3d reconstruction with rgb-d sensor // *Proc. of the IEEE Conf. on computer vision and pattern recognition*. 2018. P. 4645–4653.
11. *Ma R.* et al. Real-time 3D reconstruction of colonoscopic surfaces for determining missing regions // *Medical Image Computing and Computer Assisted Intervention—MICCAI 2019: 22nd Intern. Conf. Shenzhen, China, 13–17 October 2019, Proc., Pt V 22*. Springer International Publishing, 2019. P. 573–582.
12. *Movchan A. K., Kapustin V. V., Kuryachiy M. I., and Movchan E. S.* Distance Measurement using Active-Pulse Television Measuring Systems with Automatic Scanning of Space by Depth // 2023 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics). Omsk, Russian Federation, 2023. P. 1–7. DOI: 10.1109/Dynamics60586.2023.10349593.
13. *Капустин В. В., Мовчан А. К.* Многозонные методы формирования карт глубин с использованием активно-импульсных телевизионных измерительных систем // *Вопросы радиоэлектроники. Сер. Техника телевидения*. 2023. № 2. С. 44–54.
14. *Chaldina E. S., Movchan A. K., Kapustin V. V. and Kuryachiy M. I.* Multi-Area Range Measurement Method Using Active-Pulse Television Measuring Systems // 21st Intern. Conf. of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices (EDM). Chemal, Russia, 2020. P. 293–297. DOI: 10.1109/EDM49804.2020.9153500.
15. *Мовчан А. К.* и др. Методы и алгоритмы прецизионного измерения дальности активно-импульсными телевизионными измерительными системами // *Докл. Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники*. 2020. Т. 23, №. 2. С. 7–14.
16. *Movchan A. K., Kapustin V. V., Kuryachiy M. I., and Movchan E. S.* Multi-Area Method of a Depth Map Building with Gain Modulation in Active-Pulse Television Measuring Systems // 2022 Intern. Siberian Conf. on Control and Communications (SIBCON). Tomsk, Russian Federation, 2022. P. 1–6. DOI: 10.1109/SIBCON56144.2022.10002872.
17. Аэрозольные камеры [Электронный ресурс]: <<https://iao.ru/ru/about/resources/equip/acams>>. (дата обращения: 30.01.2024)
18. *Musikhin I. D., Kapustin V. V., Tislenko A. A., Movchan A., Zabuga S. A.* Building Depth Maps Using an Active-Pulse Television Measuring System in Real Time Domain // *Scientific Visualization*. 2024. Vol. 16, N 1. P. 38–51. DOI: 10.26583/sv.16.1.04.
19. Свид-во о гос. рег. программы для ЭВМ 2023615399 РФ. Формирователь карт глубин АИ ТИС / *И. Д. Мусихин, С. А. Забуга, В. В. Капустин, А. Мовчан*. Заяв. № 2023614290 от 11.03.2023, опубл. 14.03.2023.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Илья Денисович Мусихин

— магистрант; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, кафедра телевидения и управления;
E-mail: ilia.d.musikhin@tusur.ru

Вячеслав Валериевич Капустин

— канд. техн. наук; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, кафедра телевидения и управления;
E-mail: viacheslav.v.kapustin@tusur.ru

- Сергей Александрович Забуга** — магистрант; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, кафедра телевидения и управления; E-mail: sergeizabuga@gmail.com
- Андрей Мовчан** — канд. техн. наук; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, кафедра телевидения и управления; доцент; E-mail: mr.movchann@mail.ru
- Егор Сергеевич Познахарев** — Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН, лаборатория распространения оптических сигналов; науч. сотр.; E-mail: 724_pes1992@iao.ru

Поступила в редакцию 15.03.2024; одобрена после рецензирования 19.04.2024; принята к публикации 19.06.2024.

REFERENCES

- Gimeno J. et al. *Computers in Industry*, 2013, no. 9(64), pp. 1263–1271.
- Devagiri J.S. et al. *Expert Systems with Applications*, 2022, pp. 118002.
- Rahimian F.P. et al. *Automation in Construction*, 2020, vol. 110, pp. 103012.
- Vijayanagar K.R., Loghman M., Kim J. *International SoC Design Conference (ISOC)*, IEEE, 2012, pp. 355–358.
- Yahav G., Iddan G.J., Mandelbom D. *2007 Digest of Technical Papers International Conference on Consumer Electronics*, IEEE, 2007, pp. 1–2.
- Häne C. et al. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, IEEE, 2011, pp. 1618–1625.
- Haigron P. et al. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2004, no. 11(23), pp. 1380–1390.
- Angelopoulos A.N. et al. *Scientific reports*, 2019, no. 1(9), pp. 11230.
- Krutikova O., Sisojevs A., Kovalovs M. *Procedia Computer Science*, 2017, vol. 104, pp. 452–459.
- Fu Y. et al. *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2018, pp. 4645–4653.
- Ma R. et al. *Medical Image Computing and Computer Assisted Intervention—MICCAI 2019, 22nd International Conference*, Shenzhen, China, October 13–17, 2019, Proc., Part V 22. Springer International Publishing, 2019, pp. 573–582.
- Movchan A.K., Kapustin V.V., Kuryachiy M.I., and Movchan E.S. *Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics)*, Omsk, Russian Federation, 2023, pp. 1–7, DOI: 10.1109/Dynamics60586.2023.10349593.
- Kapustin V.V., Movchan A.K. *Voprosy radioelektroniki. Seriya: Tekhnika teledeniya*, 2023, no. 2, pp. 44–54. (in Russ.)
- Chaldina E.S., Movchan A.K., Kapustin V.V., and Kuryachiy M.I. *21st International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices (EDM)*, Chemal, Russia, 2020, pp. 293–297, DOI: 10.1109/EDM49804.2020.9153500.
- Movchan A.K., Kapustin V.V., Kuryachiy M.I., Chaldina E.S. *Proceedings of TUSUR University*, 2020, no. 2(23), pp. 7–14. (in Russ.)
- Movchan A.K., Kapustin V.V., Kuryachiy M.I., and Movchan E.S. *International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON)*, Tomsk, Russian Federation, 2022, pp. 1–6, DOI: 10.1109/SIBCON56144.2022.10002872.
- <https://iao.ru/ru/about/resources/equip/acams>. (in Russ.)
- Musikhin I.D., Kapustin V.V., Tislenko A.A., Movchan A., Zabuga S.A. *Scientific Visualization*, 2024, no. 1(16), pp. 38–51, DOI: 10.26583/sv.16.1.04.
- Certificate on the state registration of the computer programs RU 2023615399, *Formirovatel' kart glubin AI TIS* (Depth Map Maker AI TIS), I.D. Musikhin, S.A. Zabuga, V.V. Kapustin, A. Movchan, Application no. 2023614290, Priority 11.03.2023, Published 14.03.2023. (in Russ.)

DATA ON AUTHORS

- Ilya D. Musikhin** — Master Student; Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Department of Television and Control; E-mail: ilia.d.musikhin@tusur.ru
- Vyacheslav V. Kapustin** — PhD, Associate Professor; Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Department of Television and Control; Associate Professor; E-mail: viacheslav.v.kapustin@tusur.ru
- Sergey A. Zabuga** — Master Student; Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Department of Television and Control; E-mail: sergeizabuga@gmail.com
- Andrew Movchan** — PhD, Associate Professor; Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Department of Television and Control; Associate Professor; E-mail: mr.movchann@mail.ru
- Egor S. Poznakharev** — V. E. Zuev Institute of Atmospheric Optics of the RAS, Siberian Branch, Laboratory of Optical Signals Propagation; Researcher; E-mail: 724_pes1992@iao.ru

Received 15.03.2024; approved after reviewing 19.04.2024; accepted for publication 19.06.2024.

МЕТОДЫ И ПРИБОРЫ ДЛЯ АНАЛИЗА И КОНТРОЛЯ МАТЕРИАЛОВ, ИЗДЕЛИЙ, ВЕЩЕСТВ И ПРИРОДНОЙ СРЕДЫ

METHODS AND INSTRUMENTS FOR ANALYSIS AND MONITORING OF THE NATURAL ENVIRONMENT, SUBSTANCES, MATERIALS AND PRODUCTS

УДК 681.787

DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-8-722-726

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Е. Е. Майоров^{1*}, Г. А. Костин², В. В. Курлов¹, Н. Е. Баранов²

¹ Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
Санкт-Петербург, Россия

² Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации
имени Главного маршала авиации А. А. Новикова, Санкт-Петербург, Россия

* majorov_ee@mail.ru

Аннотация. Интерференционным методом исследованы поверхности фрагментов киля Airbus A 320, Boeing 737-700 и Ту-214. Приведена функциональная схема измерительной установки. Получены изображения микрорельефа поверхностей и измерены расстояния до поверхности при ее линейном перемещении вдоль оси OX относительно оптического зрачка с шагом 100 мкм, в каждой точке выполнялось 20 измерений.

Ключевые слова: интерференционная установка, летательный аппарат, динамическая поверхность, шероховатость, рельеф, диаметр светового пятна

Ссылка для цитирования: Майоров Е. Е., Костин Г. А., Курлов В. В., Баранов Н. Е. Исследование динамической поверхности летательного аппарата интерференционным методом // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 8. С. 722–726. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-8-722-726.

STUDY OF THE DYNAMIC SURFACE OF AN AIRCRAFT BY THE INTERFERENCE METHOD

E. E. Maiorov^{1*}, G. A. Kostin², V. V. Kurlov¹, N. E. Baranov²

¹ St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, St. Petersburg, Russia

² St. Petersburg State University for Civil Aviation, St. Petersburg, Russia

* majorov_ee@mail.ru

Abstract. The surfaces of the fin fragments of the Airbus A 320, Boeing 737-700 and Tu-214 are investigated using the interference method. The functional diagram of the measuring setup is given. The images of the surface microrelief are obtained and the distances to the surface are measured during its linear movement along the OX axis relative to the optical pupil with a step of 100 μm , 20 measurements are performed at each point.

Keywords: interference setup, aircraft, dynamic surface, roughness, relief, light spot diameter

For citation: Maiorov E. E., Kostin G. A., Kurlov V. V., Baranov N. E. Study of the dynamic surface of an aircraft by the interference method. *Journal of Instrument Engineering*. 2024. Vol. 67, N 8. P. 722–726 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-8-722-726.

Исследование формы поверхности занимает важное место в решении многих задач метрологии. Оптические измерения являются наиболее универсальными методами исследований [1], обеспечивая высокую точность [2]. Известно, что чувствительность и точность измерений этих методов составляет порядка десятых микрометра [3]. Развитие микроэлектроники, робо-

тотехники, информационных технологий позволило увеличить точность, чувствительность, диапазон измерений в десятки, а порой и в сотни раз [4]. Проанализировав методы измерений поверхности, можно с большой уверенностью сказать о том, что оптические измерения выгодно отличаются убедительностью, надежностью, наглядностью. Поэтому их роль в аэрокосмической области и авиации становится первостепенной и незаменимой [5].

Авиационная промышленность огромное внимание уделяет созданию современных летательных аппаратов [6], а потому внедряются высокие технологии технической эксплуатации летательного аппарата. По состоянию сложных систем и агрегатов (двигатель, навигационная аппаратура, система управления и т. д.) воздушного судна необходимо иметь достоверные данные. Значимым фактором является надежность и эффективность обслуживания летательного аппарата для обеспечения безопасности полетов.

При проектировании воздушного судна много времени уходит на усовершенствование аэродинамических характеристик [7]. В частности, детальному исследованию подлежат динамические поверхности (отдельные области крыла, фюзеляж, стабилизаторы, киль и т. д.), которые позволяют регулировать ориентацию воздушного судна в полете и контролировать ее [8, 9]. От того, из какого материала изготовлена динамическая поверхность, каковы геометрия и шероховатость поверхности, зависят устойчивость и управляемость самолета. Известно, что производители авиационной техники стремятся максимально уменьшить трение на динамических поверхностях, а значит, класс чистоты поверхности (класс шероховатости) должен быть относительно высоким. Поэтому интерес представляет получение данных о геометрических параметрах одной из динамических поверхностей разных летательных аппаратов.

Цель настоящей работы — интерференционным методом определить шероховатость поверхности фрагмента киля при ее линейном перемещении вдоль оси OX относительно оптического зрачка с шагом 100 мкм. В качестве объектов исследования использовались поверхности фрагментов (анализируемый участок поверхности 2×2 мм) киля различных летательных аппаратов — Airbus A 320, Boeing 737-700 и Ту-214 (материалы были предоставлены техническим отделом авиационного завода).

Киль представляет собой часть хвостового оперения, которая расположена в нормальной плоскости летательного аппарата, он обеспечивает устойчивость и управляемость во время полета. Внешняя поверхность киля служит для придания обтекаемой формы и, как правило, выполняется из отдельных листов алюминиевого сплава.

Для проведения экспериментальных исследований была применена интерференционная установка, функциональная схема которой представлена на рис. 1 (1, 11 — источники излучения; 2 — микрообъектив; 3 — светоделитель; 4 — объект; 5, 7, 8 — зеркала; 12 — фотоприемники; 9 — модулятор; 10 — дифракционные решетки; 13 — датчик скорости; 14 — блок электронной обработки сигналов; 15 — плоскопараллельная пластина; РС — компьютер).

Источник излучения — диод белого света I с длиной когерентности $l_c = 1$ мкм. Объектив 2 ($12\times$, $f = 21,5$ мм, $A = 0,1$) фокусирует излучение источника на контролируемую поверхность объекта 4 и опорную поверхность 8. При контроле рельефа поверхности фиксировалось мак-

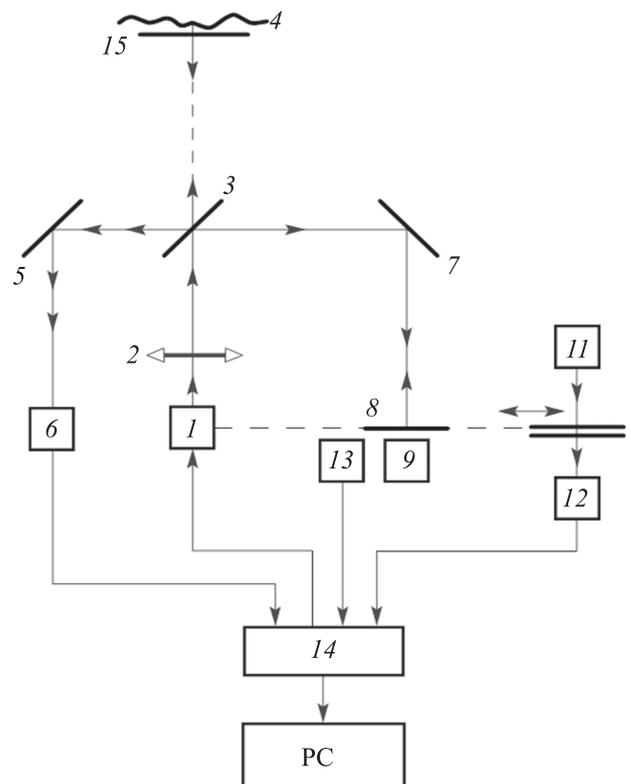


Рис. 1

симальное значение сигнала фотодиодом 6, когда наступал момент равенства оптических длин в ветвях интерферометра. Изменение рельефа поверхности приводило в движение зеркало 8, которое было закреплено на специальном механизме. Электромагнит 9 приводил в движение этот механизм.

При перемещении 8 изменение в опорной ветви фиксировалось двумя голографическими решетками 10, одна из которых неподвижна, а другая двигалась вместе с 8. Шаг дифракционных решеток — 0,8 мкм. Решетки освещались светодиодом 11, а сигнал фиксировался фотодиодом 12.

При динамических исследованиях, к которым относятся измерения данных объектов, необходимо обеспечить независимость результатов измерений от возможных смещений контролируемой поверхности во время сканирования. Проще всего это осуществить, если в качестве базовой плоскости отсчета использовать поверхность плоскопараллельной пластины, которая жестко прикреплена к контролируемой поверхности. В этом случае измеряемой величиной является зазор между двумя указанными поверхностями. Также в этом случае нет необходимости во втором интерферометре, поскольку опорный сигнал формируется светом, отраженным от поверхности плоскопараллельной пластины.

Интерференционное устройство позволяло контролировать расстояние до поверхности, которое соответствовало максимуму интерференционного сигнала. Искомой величиной являлся зазор между плоскопараллельной пластинкой и контролируемой поверхностью. Специальное программное обеспечение интерферометра обеспечивало возможность демонстрировать наблюдаемые изображения и переводить их в трехмерную копию.

На рис. 2 представлен микрорельеф фрагмент поверхности кия: *a* — Airbus A 320; *б* — Boeing 737-700; *в* — Ту-214.

Поверхность кия ориентировалась относительно светового луча под углом $\theta = 0$. Для этого угла измерялось расстояние до поверхности, линейно перемещающейся вдоль оси *OX* относительно оптического зрачка. Поверхность смещалась относительно оптического зрачка с шагом 100 мкм, и для каждой точки выполнялось 20 измерений. Контроль осуществлялся по классической методике: смещение интерференционной картины на одну полосу соответствовало отклонению от плоскости на $\lambda/2 \approx 0,3$ мкм.

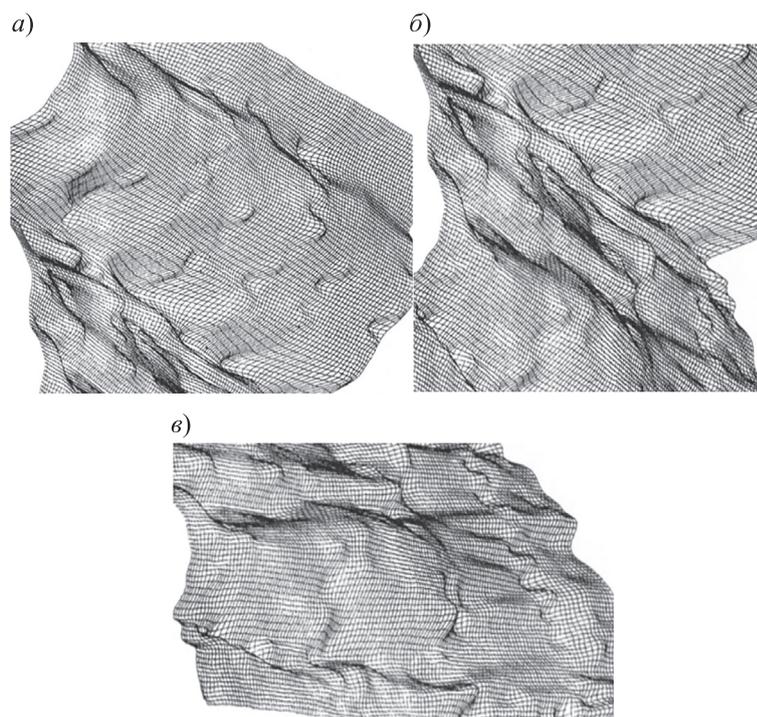


Рис. 2

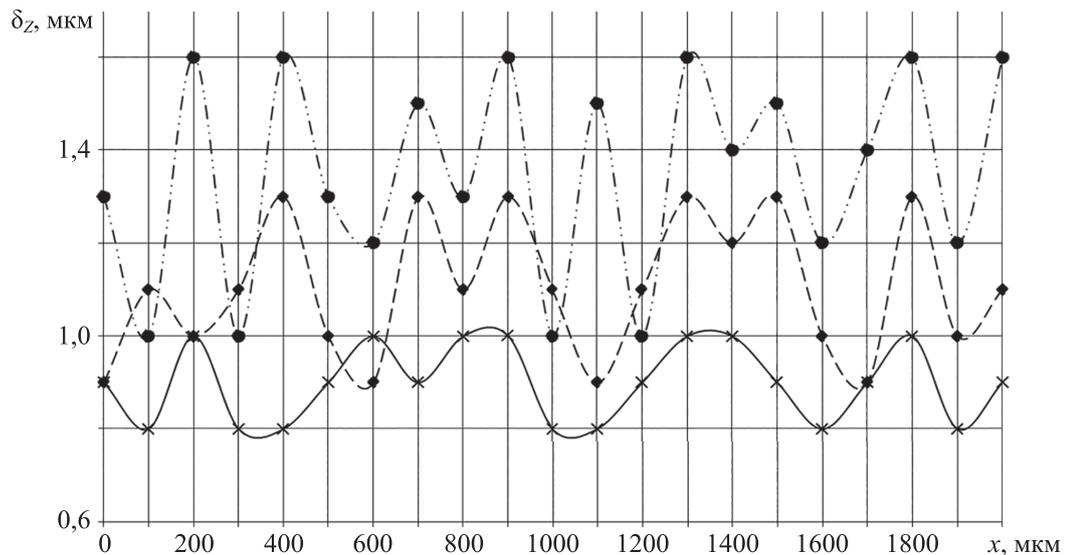


Рис. 3

Результаты измерения расстояния до поверхности кия при ее линейном перемещении вдоль оси Ox приведены на рис. 3 (\times — рельеф Airbus A 320; \blacklozenge — рельеф Boeing 737-700; \bullet — рельеф Tu-214). Как следует из графических зависимостей, поверхности имеют микронеровности в пределах измеряемой длины 2000 мкм. Проанализировав кривые, можно констатировать, что поверхности хорошо обработаны. Видно, что высота рельефа δ_z для каждой поверхности различается. Наибольшие значения зафиксированы у поверхности кия Boeing 737-700, а наименьшие — у Tu-214, видимо, это обусловлено особенностями обработки поверхности.

С использованием специализированного программного обеспечения интерференционного устройства в работе получены компьютерные изображения поверхностей. Измерен рельеф поверхности при нормальном зондировании (расстояние до поверхности 100 мм, диаметр светового пятна на поверхности 10 мкм). Показано, что отечественные технологии обработки поверхностей, в частности в авиационной промышленности, не уступают зарубежным аналогам, а в чем-то превосходят (исследованные поверхности кия Airbus A 320 и Boeing 737-700 можно отнести к шестому классу шероховатости, а Tu-214 — к седьмому). Представленная работа может быть интересна техническим отделам авиационных заводов при изготовлении динамических поверхностей летательного аппарата.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бородинский Ю. М., Майоров Е. Е., Петрова Е. А., Попова Е. В., Курлов В. В., Удахина С. В. Измерение геометрических параметров поверхностей сложной формы низкокогерентной оптической системой // Приборы. 2022. № 5 (263). С. 3–7.
2. Майоров Е. Е. Исследование сложных форм поверхностей когерентно ограниченной во времени системой // Моделирование и ситуационное управление качеством сложных систем: Четвертая Всерос. науч. конф. (СПб, 18–22 апреля 2023 г.): сб. докл. СПб: ГУАП, 2023. С. 65–68.
3. Майоров Е. Е., Костин Г. А., Черняк Т. А. Экспериментальная измерительная система для контроля поверхностей корпуса воздушного судна // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 5. С. 430–436. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-430-436.
4. Майоров Е. Е., Бородинский Ю. М., Курлов В. В., Таюрская И. С., Пушкина В. П., Гулиев Р. Б. Пространственное микросканирование поверхности плоскопараллельных стеклянных пластинок интерференционным методом // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 8. С. 688–695. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-8-688-695.
5. Майоров Е. Е., Костин Г. А., Черняк Т. А., Баранов Н. Е. Использование излучения с малой временной когерентностью для исследования поверхности щелевых закрылок на крыле самолета // Изв. Тульского государственного университета. Технические науки. 2023. Вып. 7. С. 577–581. DOI: 10.24412/2071-6168-2023-7-577-578.
6. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Аэродинамика самолета. Динамика продольного и бокового движения. М.: Машиностроение, 1979. 354 с.

7. Мышкин Л. В. Прогнозирование развития авиационной техники: теория и практика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 304 с.
8. Байдаков В. Б., Клумов А. С. Аэродинамика и динамика полета летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1979. 342 с.
9. Котик М. Г. Динамика взлета и посадки самолетов. М.: Машиностроение, 1984. 256 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

- Евгений Евгеньевич Майоров** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра прикладной математики; доцент; E-mail: majorov_ee@mail.ru
- Геннадий Александрович Костин** — докт. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации имени Главного маршала авиации А. А. Новикова, кафедра прикладной математики и информатики; проректор по науке и цифровизации; E-mail: ga_kostin@spbguga.ru
- Виктор Валентинович Курлов** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра инноватики и интегрированных систем качества; доцент; E-mail: vitek543@rambler.ru
- Николай Евгеньевич Баранов** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации имени Главного маршала авиации А. А. Новикова, кафедра аэродинамики и динамики полета; заведующий кафедрой; E-mail: nbaranov@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.12.2023; одобрена после рецензирования 12.01.2024; принята к публикации 19.06.2024.

REFERENCES

1. Borodyansky Yu.M., Maiorov E.E., Petrova E.A., Popova E.V., Kurlov V.V., Udakhina S.V. *Instruments*, 2022, no. 5(263), pp. 3–7. (in Russ.)
2. Maiorov E.E. *Modelirovaniye i situatsionnoye upravleniye kachestvom slozhnykh sistem* (Modeling and Situational Quality Control of Complex Systems), Collection of reports of the Forth All-Russian Scientific Conference, St. Petersburg, April 18–22, 2023, pp. 65–68. (in Russ.)
3. Maiorov E.E., Kostin G.A., Chernyak T.A. *Journal of Instrument Engineering*, 2023, no. 5(66), pp. 430–436, DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-430-436. (in Russ.)
4. Maiorov E.E., Borodyansky Yu.M., Kurlov V.V., Tayurskaya I.S., Pushkina V.P., Guliyev R.B. *Journal of Instrument Engineering*, 2023, no. 8(66), pp. 688–695, DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-8-688-695. (in Russ.)
5. Maiorov E.E., Kostin G.A., Chernyak T.A., Baranov N.E. *News of the Tula State University. Technical Sciences*, 2023, no. 7, pp. 577–581, DOI: 10.24412/2071-6168-2023-7-577-578. (in Russ.)
6. Byushgens G.S., Studnev R.V. *Aerodinamika samoleta. Dinamika prodol'nogo i bokovogo dvizheniya* (Aerodynamics of the Aircraft. Dynamics of Longitudinal and Lateral Motion), Moscow, 1979, 354 p. (in Russ.)
7. Myshkin L.V. *Prognozirovaniye razvitiya aviatsionnoy tekhniki: teoriya i praktika* (Forecasting the Development of Aviation Technology: Theory and Practice), Moscow, 2006, 304 p. (in Russ.)
8. Baydakov V.B., Klumov A.S. *Aerodinamika i dinamika polota letatel'nykh apparatov* (Aerodynamics and Flight Dynamics of Aircraft), Moscow, 1979, 342 p. (in Russ.)
9. Kotik M.G. *Dinamika vzleta i posadki samoletov* (Dynamics of Takeoff and Landing of Aircraft), Moscow, 1984, 256 p. (in Russ.)

DATA ON AUTHORS

- Evgeny E. Maiorov** — PhD, Associate Professor; Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Department of Applied Mathematics; E-mail: majorov_ee@mail.ru
- Gennady A. Kostin** — Dr. Sci, Associate Professor; St. Petersburg State University for Civil Aviation, Department of Applied Mathematics and Computer Science; Vice-Rector for Science and Digitalization; E-mail: ga_kostin@spbguga.ru
- Viktor V. Kurlov** — PhD, Associate Professor; St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Department of Innovation and Integrated Quality Systems; E-mail: vitek543@rambler.ru
- Nikolay E. Baranov** — PhD, Associate Professor; St. Petersburg State University for Civil Aviation, Department of Aerodynamics and Flight Dynamic; Head of the Department; E-mail: nbaranov@yandex.ru

Received 13.12.2023; approved after reviewing 12.01.2024; accepted for publication 19.06.2024.