

ISSN 2500—0381

Электронная версия

ISSN 0021—3454

Печатная версия

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

ПРИБОРОСТРОЕНИЕ

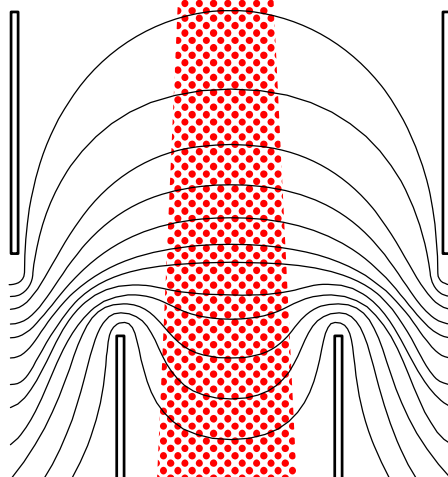
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



№ **5**

Т. 66
2023

Journal of **I**nstrument **E**ngineering



ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

*д-р техн. наук, проф. А. А. БОБЦОВ,
Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А. П. АЛЕШКИН, д-р техн. наук, проф., ВКА им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия
А. В. БЕЛИКОВ, д-р техн. наук, проф., Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
И. А. БЕССМЕРТНЫЙ, д-р техн. наук, проф., Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
В. А. БОГАТЫРЕВ, д-р техн. наук, проф., Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
Д. В. ЕФАНОВ, д-р техн. наук, проф., СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия
А. КЛИМЧИК, PhD, доцент, Университет Иннополис, Иннополис, Россия
С. А. КОЛЮБИН, д-р техн. наук, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
И. А. КОНЯХИН, д-р техн. наук, проф., Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
В. В. КРИШТОП, д-р физ.-мат. наук, проф., ПНИПУ, Пермь, Россия
Л. С. ЛИСИЦЫНА, д-р техн. наук, проф., Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
В. Д. ЛУКЬЯНОВ, д-р физ.-мат. наук, проф., ОАО „Авангард“, Санкт-Петербург, Россия
А. В. ЛЯМИН, д-р техн. наук, доцент, СПбПУ, Санкт-Петербург, Россия
А. В. МАЛОЛЕТОВ, д-р физ.-мат. наук, проф., Университет Иннополис, Иннополис, Россия
Ю. Н. МАТВЕЕВ, д-р техн. наук, ООО „ЦРТ-инновации“, Санкт-Петербург, Россия
В. М. МЕДУНЕЦКИЙ, д-р техн. наук, проф., ООО „Феррум“, Санкт-Петербург, Россия
В. М. МУСАЛИМОВ, д-р техн. наук, проф., ИПМаш РАН, Санкт-Петербург, Россия
А. А. ОЖИГАНОВ, д-р техн. наук, проф., АО «НИТИ „Авангард“», Санкт-Петербург, Россия
А. А. ПЫРКИН (зам. главного редактора), д-р техн. наук, проф., Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
Б. В. СОКОЛОВ, д-р техн. наук, проф., СПбФИЦ РАН, Санкт-Петербург, Россия
С. В. СОЛК, д-р техн. наук, НИИ ОЭП, Сосновый Бор, Ленинградская обл., Россия
Д. В. ТИТОВ, д-р техн. наук, доцент, ЮЗГУ, Курск, Россия
А. В. ФЕДОРОВ, д-р техн. наук, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
Н. Б. ФИЛИМОНОВ (зам. главного редактора), д-р техн. наук, проф., МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
И. Б. ФУРТАТ, д-р техн. наук, доцент, ИПМаш РАН, Санкт-Петербург, Россия

Ответственный секретарь *М. В. Лебецкая*

Редактор *И. М. Игошина*

Набор, верстка: *М. В. Герасимова*

Перевод: *Ю. И. Котилевич*

Адрес: 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, лит. А, Университет ИТМО

Телефон: (812) 480-02-73, E-mail: pribor@itmo.ru
[http: // pribor.ifmo.ru/](http://pribor.ifmo.ru/)

Подписано в печать 31.05.2023 г.

*Отпечатано в учреждении „Университетские телекоммуникации“
Адрес: 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49, лит. А
Телефон: (812) 915-14-54, E-mail: Prudentov@tibir.ru*

Редколлегия просит авторов и рецензентов отнестись с пониманием к ужесточению требований к рукописям и изменению формы подачи материала в журнале.

Аннотация объемом 150—250 слов должна отражать содержание статьи: предмет исследования, цель работы, метод проведения работы, краткое описание экспериментальных или теоретических исследований, полученные результаты и рекомендации по их применению.

Ключевые слова, служащие идентификаторами при предметном поиске, должны однозначно отражать содержание статьи. Основное ключевое слово/словосочетание указывается первым, общее количество ключевых слов — не менее 5.

Список литературы: для обзорной статьи рекомендуется приводить не менее 50 источников, для полнотекстовой статьи — не менее 15, для краткого сообщения — не менее 8.

Требования к оформлению рукописи размещены на сайте журнала <http://pribor.itmo.ru/>



Адрес: 197101, Санкт-Петербург,
Кронверкский пр., 49, лит. А, Университет ИТМО
Телефон: (812) 480-02-73
[http:// pribor.ifmo.ru/](http://pribor.ifmo.ru/)
E-mail: pribor@itmo.ru

Журнал публикует научные обзоры, полнотекстовые статьи и краткие сообщения, отражающие результаты практических и теоретических исследований в области приборостроения.

Журнал содержит следующие разделы: информационные технологии и системы, приборы и системы автоматического управления, вычислительная техника, приборы навигации, элементы и устройства вычислительной техники и систем управления, оптические и оптико-электронные приборы и системы, акустические приборы и системы, приборы и методы контроля природной среды, веществ, материалов и изделий, приборы, системы и изделия медицинского назначения, технология приборостроения, научные и практические разработки. По договоренности с Редакцией может быть опубликован специальный тематический выпуск, посвященный достаточно узкой проблеме приборостроения.

Рукопись подается по электронной почте: pribor@itmo.ru. Редакция принимает рукопись к рецензированию при условии получения полного комплекта документов, включающего:

- экспертное заключение о возможности опубликования в открытой печати (формат PDF);
- файлы рукописи статьи, оформленные в соответствии с требованиями журнала;
- сведения об авторах, заполненные по шаблону (на русском и английском языке);
- договор о передаче авторских прав.

Рукопись должна содержать:

- название статьи (на русском и английском языке), индекс УДК;
- аннотацию (150—250 слов, на русском и английском языке), ключевые слова (не менее 5 и не более 25, на русском и английском языке), основной текст, список литературы;
- рисунки: каждый на отдельном листе формата А4 (не заверстывать в текст), таблицы.

Объем текста (оформленного в соответствии с требованиями журнала — шрифт Times New Roman, размер — 14 пт, междустрочный интервал 1,5, поля — сверху и слева 25 мм, снизу 20 мм, справа 10 мм) должен составлять 10—20 страниц, краткого сообщения — 3—5. Объем обзора предварительно согласовывается с Редакцией.

Список литературы (рекомендуется): для обзорной статьи — не менее 50, для полнотекстовой статьи — не менее 15, для краткого сообщения — не менее 8 литературных источников (не менее половины из них должны представлять собой ссылки на издания, включенные в международные базы цитирования Scopus и Web of Science). Список литературы должен формироваться в порядке появления ссылок в тексте.

Не допускается выравнивание с помощью пробелов, табуляций и символов конца абзаца. Эти символы при необходимости могут вставляться не более одного раза подряд (**не переносить с помощью дефисов**).

Формулы и отдельные символы набираются с использованием редактора формул MathType (Microsoft Equation). **Не вставлять** формулы из пакетов MathCad и MatLab. Размер шрифта в формулах — по умолчанию. Все переменные набираются курсивом, греческие буквы — прямым шрифтом, полужирные символы в формуле — стилем „матрица вектор“, русские символы — стилем „текст“, векторы следует набирать полужирным шрифтом без стрелок.

Рисунки выполняются в градациях серого в одном из форматов приложений Microsoft (Word, Excel, PowerPoint), предпочтителен векторный формат. Кривые на графиках следует помечать цифрами (1, 2, 3 и т.д.) или/и задавать линиями разного стиля (пунктир, штрихпунктир, жирная); толщина осей должна быть не менее 0,5 пт, иначе качество печати не гарантируется.

Датой поступления статьи считается последняя после доработки.

Плата за публикацию не взимается.

СОДЕРЖАНИЕ

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

- Ефанов Д. В.** Синтез самопроверяемых вычислительных устройств на основе полной системы особых групп выходов объекта диагностирования355
- Песчанский А. И.** Стационарные показатели системы обслуживания $GI/G/1/1$ в терминах характеристик регенерирующего процесса373
- Аветисян Т. В., Львович Я. Е., Преображенский А. П.** Оптимизация процессов в киберфизических системах389
- Сергеев А. М.** Структурированные по Уолшу двухуровневые и модульно двухуровневые квазиортогональные матрицы для маскирования изображений399

ОПТИЧЕСКИЕ И ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫЕ ПРИБОРЫ И КОМПЛЕКСЫ

- Шанин Ю. И., Шарапов И. С.** Надежность двухосевых сканирующих головок, применяемых в аддитивном производстве409
- Джавадов Н. Г., Агаев Ф. Г., Джаббарлы Б. Р.** Методика оптимизации времяпролетного оптического турбидиметра423

ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ КОНТРОЛЯ ПРИРОДНОЙ СРЕДЫ, ВЕЩЕСТВ, МАТЕРИАЛОВ И ИЗДЕЛИЙ

- Майоров Е. Е., Костин Г. А., Черняк Т. А.** Экспериментальная измерительная система для контроля поверхностей корпуса воздушного судна430

EDITOR-IN-CHIEF

*Dr. Sci., Prof. ALEXEY BOBTSOV,
ITMO University, St. Petersburg, Russia*

EDITORIAL BOARD

ALESHKIN ANDREY, Dr. Sci., Prof., A. F. Mozhaisky Military Space Academy, St. Petersburg, Russia
BELIKOV ANDREY, Dr. Sci., Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
BESSMERTNY IGOR, Dr. Sci., Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
BOGATYREV VLADIMIR, Dr. Sci., Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
EFANOV DMITRY, Dr. Sci., Prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia
KLIMCHIK ALEXANDER, PhD, Ass. Prof., Innopolis University, Innopolis, Russia
KOLYUBIN SERGEY, Dr. Sci., Ass. Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
KONYAKHIN IGOR, Dr. Sci., Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
KRISHTOP VIKTOR, Dr. Sci., Prof., PNRPU, Perm, Russia
LISITSYNA LYUBOV, Dr. Sci., Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
LUKYANOV VALERY, Dr. Sci., Prof., Avangard JSC, St. Petersburg, Russia
LYAMIN ANDREY, Dr. Sci., Ass. Prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia
MALOLETEV ALEXANDER, Dr. Sci., Prof., Innopolis University, Innopolis, Russia
MATVEEV YURIY, Dr. Sci., Speech Technology Center, St. Petersburg, Russia
MEDUNETSKY VIKTOR., Dr. Sci., Prof., Ferrum LLC, St. Petersburg, Russia
MUSALIMOV VIKTOR, Dr. Sci., Prof., IPMash RAS, St. Petersburg, Russia
OZHIGANOV ALEXANDER, Dr. Sci., Prof., SRTI Avangard JSC, St. Petersburg, Russia
PYRKIN ANTON, Dr. Sci., Prof., Deputy Editor-in-Chief, ITMO University, St. Petersburg, Russia
SOKOLOV BORIS, Dr. Sci., Prof., SPbFRC RAS, St. Petersburg, Russia
SOLK SERGEY, Dr. Sci., SRI OEP, Sosnovy Bor, Leningrad region, Russia
TITOV DMITRY, Dr. Sci., Ass. Prof., SWSU, Kursk, Russia
FEDOROV ALEXEY, Dr. Sci., Ass. Prof., ITMO University, St. Petersburg, Russia
FILIMONOV NIKOLAY, Dr. Sci., Prof., Deputy Editor-in-Chief, M. V. Lomonosov MSU, Moscow, Russia
FURTAT IGOR, Dr. Sci., Ass. Prof., IPMash RAS, St. Petersburg, Russia

Executive secretary Marina V. Lebedskaya

Editor Irina M. Igoshina

Page-proof, makeup Maria V. Gerasimova

Translation of Yuriy I. Kopilevich

Address: ITMO University, Kronverksky pr. 49, bldg. A, St. Petersburg, Russia, 197101

Tel: (812) 480-02-73

Site: pribor.ifmo.ru

E-mail: pribor@itmo.ru

THE MINISTRY OF SCIENCE AND HIGHER EDUCATION OF THE RUSSIAN FEDERATION

JOURNAL OF INSTRUMENT ENGINEERING

ITMO UNIVERSITY

The Journal is published since January 1958

Vol. 66

MAY 2023

№ 5

CONTENTS

SYSTEM ANALYSIS, CONTROL, AND INFORMATION PROCESSING

- Efanov D. V.** Synthesis of Self-Checking Computing Devices Based on a Complete System of Special Groups of the Diagnostic Object Outputs355
- Peschansky A. I.** Stationary Characteristics of $GI/G/1/1$ Queuing System in Terms of the Renewal Process373
- Avetisyan T. V., Lvovich Ya. E., Preobrazhensky A. P.** Optimization of Processes in Cyber-Physical Systems389
- Sergeev A. M.** Two-Level and Modularly Two-Level Quasi-Orthogonal Walsh-Structured Matrices for Image Masking.....399

OPTICAL AND OPTO-ELECTRONIC INSTRUMENTS AND SYSTEMS

- Shanin Yu. I., Sharapov I. S.** Reliability of Dual-Axis Scanning Heads Used in Additive Manufacturing409
- Javadov N. H., Agaev F. G., Jabbarli B. R.** Optimization Technique for a Time-of-Flight Optical Turbidimeter423

INSTRUMENTS AND METHODS FOR MONITORING

THE NATURAL ENVIRONMENT, SUBSTANCES, MATERIALS AND PRODUCTS

- Maiorov E. E., Kostin G. A., Chernyak T. A.** Experimental Measuring System for Control of Aircraft Hull Surfaces.....430

To the Authors!

The Journal of Instrument Engineering publishes scientific reviews, full-text articles and short messages, reflecting the unpublished results of theoretical and practical research in the field of fundamental instrument making.

The Journal publishes articles on the following themes: information technologies and systems, devices and automatic control systems, computer engineering, gyroscopic and navigation systems, instruments of precision mechanics, electronic and electromagnetic devices, optical and optoelectronic devices and systems, thermal regimes and reliability of devices and systems, technology and instrumentation, scientific and practical development. In agreement with the Editorial Board can be published a special themed issue devoted to a fairly narrow issue of instrumentation.

The material of the article accepted in electronic form and on any media, executed in a text editor Word without formatting along with a hard copy on A4. Electronic version of the paper may be sent by E-mail: **pribor@mail.ifmo.ru**

The size of the article (in printed form) must not exceed eight pages, a short presentation of two. Size scientific review previously agreed with the Editorial Board.

Submission includes two copies of:

— the manuscript text; list of references (recommended): review article — not less than 50, for the full text of the article — no less than 15, for short messages — at least 8 of the literary source (at least half of them should be links to the editions listed in international database of citation Scopus and Web of Science); number citations consecutively as they appear in the text;

— extended abstract (150—250 words);

— keywords (not less than 5 and not more than 25);

— illustrations: each on a separate sheet of A4 (not overestimate in the text) — big, with a maximum fill;

— the recommendation of the Department (laboratory);

— information about the authors on a template (surname, name, patronymic, name of the organization in accordance with the latest edition of the Charter, the address of the organization, academic degree and title, position, e-mail address).

The article must also enclose agreement on the transfer of copyright.

The main text. The following requirements are common to good practice in the design documents.

Font — Times New Roman, size 14, line spacing 1.5, margins — top and left — 25 mm, bottom — 20 mm, right — 10 mm.

Not allowed alignment with spaces, tabs and end of a paragraph (in the layout will need to be cleared). These symbols must be inserted only when necessary, and not more than once in a row (not to carry with dashes).

Don't insert formulas from MathCad or MatLab!

Figures and tables are to be inserted after the list of references. Graphics are accepted in one of Microsoft formats (Word, Excel, and PowerPoint); vector format is preferable. Don't use color graphics; it is better to apply dotted, dash-and dot lines, etc., or mark lines with numerical symbols.

Editorial Staff

**СИНТЕЗ САМОПРОВЕРЯЕМЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ
НА ОСНОВЕ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ ОСОБЫХ ГРУПП ВЫХОДОВ
ОБЪЕКТА ДИАГНОСТИРОВАНИЯ**

Д. В. ЕФАНОВ

*Российский университет транспорта, Москва, Россия,
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия
TrES-4b@yandex.ru*

Аннотация. Обсуждаются особенности синтеза схем встроенного контроля устройств автоматики и вычислительной техники при известной структуре объекта диагностирования. Представлено полное множество особых групп выходов, которые характеризуются каким-либо диагностическим параметром. Выделение особых групп выходов позволяет осуществлять выбор кода для построения схемы встроенного контроля с учетом возможностей обнаружения ошибок конкретной кратностью и определенного вида. Представлен способ построения схемы встроенного контроля, подразумевающий анализ всех подмножеств выходов объекта диагностирования, классификацию их по принадлежности к какой-либо особой группе выходов, а также последующее покрытие всех выходов особыми группами с выбором наилучшего по критерию структурной избыточности способа покрытия с указанием конкретных кодов для контроля вычислений. Предложенный способ в ряде случаев может быть эффективен при организации схем встроенного контроля и позволяет синтезировать самопроверяемое устройство даже в случае, когда этого невозможно добиться применением метода дублирования.

Ключевые слова: самопроверяемое устройство, схема встроенного контроля, контроль вычислений, особая группа выходов, коды с обнаружением отдельных видов ошибок

Ссылка для цитирования: Ефанов Д. В. Синтез самопроверяемых вычислительных устройств на основе полной системы особых групп выходов объекта диагностирования // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 5. С. 355—372. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-355-372.

**SYNTHESIS OF SELF-CHECKING COMPUTING DEVICES
BASED ON A COMPLETE SYSTEM OF SPECIAL GROUPS
OF THE DIAGNOSTIC OBJECT OUTPUTS**

D. V. Efanov

*Russian University of Transport, Moscow, Russia,
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia
TrES-4b@yandex.ru*

Abstract. Features of concurrent error-detection circuit synthesis for a known diagnostic object structure are discussed. A complete set of special groups of outputs that characterize them by some diagnostic parameter is presented. Separation of special groups of outputs allows to select a code for building an integrated control circuit, taking into account the possibility of detecting errors with a specific multiplicity and a certain type. A method for constructing an integrated control circuit is proposed, which involves an analysis of all subsets of the diagnostic object outputs, their classification by belonging to any special group of outputs, as well as the subsequent coverage of all outputs by special groups with the choice of the best coverage method by the criterion of structural redundancy, indicating specific codes to control the calculations. The proposed method is assumed to be effective in several cases of organizing built-in control circuits and to allow synthesizing a self-checking device even when this cannot be achieved by using the duplication method.

Keywords: self-checking device, built-in control circuit, calculation control, special group of outputs, codes with certain type error detection

For citation: Efanov D. V. Synthesis of self-checking computing devices based on a complete system of special groups of the diagnostic object outputs. *Journal of Instrument Engineering*. 2023. Vol. 66, N 5. P. 355—372 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-355-372.

Введение. Для реализации самопроверяемых цифровых устройств используются, в том числе, схемы встроенного контроля (СВК), которые позволяют контролировать вычисления на выходах объектов диагностирования [1—6].

Синтез СВК в общем случае осуществляется с использованием двух подходов. При первом подходе подразумевается отсутствие у разработчика какой-либо информации об объекте диагностирования $F(x)$ и сам объект рассматривается как некоторый „черный ящик“ с входами $x_1, x_2, \dots, x_{t-1}, x_t$ и выходами $f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f_m$. В этом случае для организации СВК применяется метод дублирования, основанный на применении модульной избыточности в процессе синтеза самопроверяемого устройства. Исходное устройство $F(x)$ снабжается копией (либо устройством с иной структурой, вычисляющим такие же функции), а результаты вычислений на одноименных выходах обоих устройств сравниваются с помощью самопроверяемого компаратора [7]. Этот подход универсален и позволяет реализовать СВК без привязки к структуре объекта $F(x)$ и к какой-либо модели неисправности. Однако он имеет и недостатки, главные из которых заключаются в том, что не во всех случаях удастся обеспечить полную самопроверяемость СВК при высокой вносимой структурной избыточности (конечное устройство по показателям структурной избыточности зачастую превосходит исходное в 3-4 раза [8]). При втором подходе подразумевается наличие у разработчика информации о структуре объекта и наиболее вероятных неисправностях. Это позволяет учитывать данные как о количестве искажаемых выходов при неисправностях элементов внутренней структуры устройства $F(x)$, так и о конкретных допустимых видах ошибок (по числу сочетаний искажений нулевых и единичных значений на выходах). Исключается необходимость „прямого“ дублирования и создается возможность путем применения кодовых методов синтезировать более простые самопроверяемые цифровые устройства, чем при использовании дублирования [9, 10].

В ряде случаев информация о структуре объекта и возможность использования ее при синтезе СВК позволяет реализовать самопроверяемые устройства с весьма низкой избыточностью (до 50 % вносимой структурной избыточности). Такой подход зачастую упрощает и процедуру обеспечения полной самопроверяемости СВК. Недостаток же заключается в покрытии только определенных, заранее оговариваемых, неисправностей, соответствующих каким-либо конкретным моделям неисправностей. При этом, естественно, они покрывают реальное множество физических дефектов и сбоев с некоторой вероятностью (ее можно зафиксировать на этапе разработки устройства с учетом используемой элементной базы).

При синтезе СВК используются методы теории информации и кодирования, а именно проводятся параллели между каналом связи и выходами объекта диагностирования и контрольных устройств в СВК: выходы объектов отождествляются с кодовыми векторами, между которыми устанавливаются определенные зависимости. К примеру, при использовании метода дублирования выходам объекта $F(x)$ в соответствие ставится информационный вектор, а выходам дополнительного устройства — контрольный вектор той же длины, значения разрядов которого получают, используя правила вычисления контрольных разрядов для одного из известных кодов с повторением [11]. Использование равномерных двоичных кодов с меньшей избыточностью позволяет исключить применение альтернативного устройства с m выходами для контроля вычислений на выходах объекта диагностирования и сократить число выходов дополнительного блока до некоторой величины k ($k < m$). Это приводит и к уменьшению сложности тестера кода в СВК [9, 10].

Учитывая особенности структуры объекта диагностирования $F(x)$, можно построить СВК по определенным правилам, так как в общем случае не исключены различные сочетания не только искажаемых значений на выходах объекта, но и видов этих искажений.

В настоящей статье обсуждаются особенности синтеза СВК с выделением групп выходов, контролепригодных по определенным диагностическим параметрам. Представлено полное множество особых групп выходов, а также предложен подход к организации СВК с анализом всех возможных особых групп выходов и выбором наилучшего способа их контроля для реальных цифровых устройств.

Система особых групп выходов. Рассмотрим частный случай цифровых устройств — комбинационные безызбыточные схемы (сами рассуждения касаются и более широкого класса устройств). В качестве модели неисправностей остановимся на анализе только одной из них — модели одиночных константных неисправностей выходов внутренних логических элементов (*stuck-at faults*) [12]. Тем не менее результаты могут быть применены и к некоторым другим моделям неисправностей.

Рассмотрим устройство $F(x)$ с t входами и m выходами. Физические дефекты и разнообразные помехи вызывают неисправности (сбои и устойчивые отказы) в элементах внутренней структуры устройства $F(x)$, которые распространяются по путям к выходам $f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f_m$, вызывая на них искажения $0 \rightarrow 1$ либо $1 \rightarrow 0$. Возникает ошибка в вычислениях. Число искажаемых выходов в векторе $\langle f_m f_{m-1} \dots f_2 f_1 \rangle$ называется *кратностью d ошибки*.

Ошибки могут быть однократными, или одиночными, при $d=1$, и многократными — при $d \geq 2$. На практике широко используется разделение ошибок на монотонные (однонаправленные) и немонотонные (разнонаправленные). Ошибка является *монотонной*, когда все искажения на выходах имеют вид $0 \rightarrow 1$ либо $1 \rightarrow 0$. Если наблюдаются искажения обоих видов, то ошибка является *немонотонной*.

Используя данную классификацию, приведем известные из научной литературы в данной предметной области понятия об особых группах выходов устройств [1].

Определение 1. *Подмножество выходов устройства образует группу независимых выходов (Н-группу), если при возникновении любой неисправности из заданного класса в элементах внутренней структуры устройства искажается значение только одного выхода из этой группы.*

Существуют методы синтеза самопроверяемых СВК, при которых выделяются Н-группы. В каждой такой группе возможно возникновение только одиночной ошибки, что и используется при выборе способа организации СВК. В этом случае применяются коды паритета для контроля возникающих ошибок. Если структуру устройства $F(x)$ изменять нельзя, то вычисления функций в каждой Н-группе выходов контролируются с помощью кода паритета. Выходы же отдельных СВК подключаются ко входам самопроверяемой схемы сжатия, функционирующей в парафазной логике [13]. Если же в структуру устройства $F(x)$ допускается внесение изменений (ресинтез), то может быть применен подход, связанный с преобразованием его структуры в такую, при которой все выходы образуют единую Н-группу [1].

Определение 2. *Подмножество выходов устройства образует группу монотонно независимых выходов (МН-группу), если при возникновении любой неисправности из заданного класса в элементах внутренней структуры устройства либо искажается значение только одного выхода из этой группы, либо при искажении значений сразу же на нескольких выходах из группы возникает монотонная ошибка.*

Выделение МН-групп выходов осуществляется аналогично выделению Н-групп. Каждая МН-группа может контролироваться на основе любого кода, обладающего свойством обнаружения любых монотонных ошибок в информационных векторах [14—16]. Наиболее часто упоминаемым среди таких кодов является классический код Бергера [17]. Известны и способы

преобразования структур контролируемых устройств в устройства с единой МН-группой выходов [18—20].

Основой классификации ошибок на выходах цифровых устройств является возможность организации СВК с обнаружением ошибок определенного вида. Так как при организации СВК выходы объекта диагностирования $F(x)$ отождествляются с кодовым вектором $\langle f_m f_{m-1} \dots f_2 f_1 \rangle$, при выделении видов ошибок могут рассматриваться особенности их обнаружения двоичными избыточными кодами.

В [21] предложено разделять немонотонные ошибки на два подвида — симметричные и асимметричные. Ошибка является *симметричной*, если при ее возникновении имеется одинаковое количество искажений $0 \rightarrow 1$ и $1 \rightarrow 0$. Если же число искажений $0 \rightarrow 1$ не равно числу искажений $1 \rightarrow 0$, то ошибка называется *асимметричной*.

Возникновение данной классификации немонотонных ошибок объясняется тем, что у широко используемых классических кодов Бергера все информационные векторы с одинаковым числом единиц (весом) имеют одинаковые контрольные векторы. Поэтому необнаруживаемой может быть только симметричная ошибка [9]. Асимметричные же ошибки обнаруживаются кодами Бергера всегда. В исследованиях 1980—90-х гг. данное свойство никак не учитывалось и не обсуждалось. Однако число асимметричных ошибок значительно превышает число симметричных ошибок при количестве выходов $m > 4$ [21]. Использование этой особенности кодов Бергера позволяет уменьшить сложность технической реализации СВК по сравнению с выделением только МН-групп выходов, что и предложено в работах [22, 23].

Определение 3. Подмножество выходов устройства образует группу монотонно и асимметрично независимых выходов (МАН-группу), если при возникновении любой неисправности из заданного класса в элементах внутренней структуры устройства либо искажается значение только одного выхода из этой группы, либо при искажении значений сразу на нескольких выходах из группы возникает монотонная либо асимметричная ошибка.

При построении СВК сначала целесообразно выделить МН-группы, а затем расширить получаемые подмножества до МАН-групп выходов. Это позволяет увеличить число выходов в группах и осуществить полное покрытие выходов меньшим их количеством.

Полная классификация ошибок на выходах цифровых устройств и в кодовых словах представлена на рис. 1, а примеры ошибок — на рис. 2 [21].

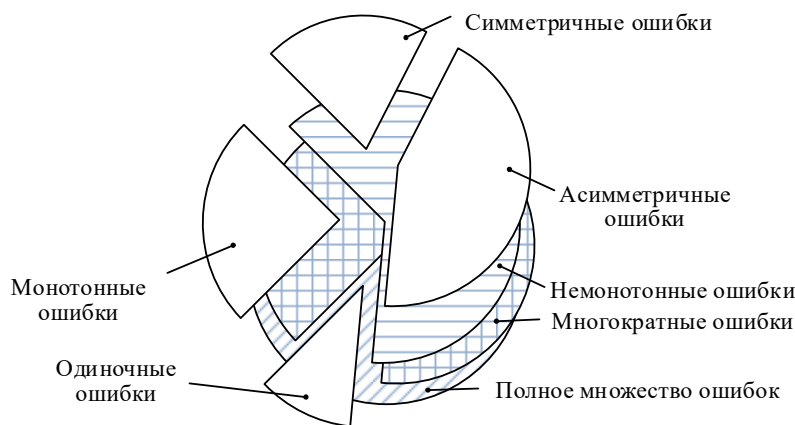


Рис. 1

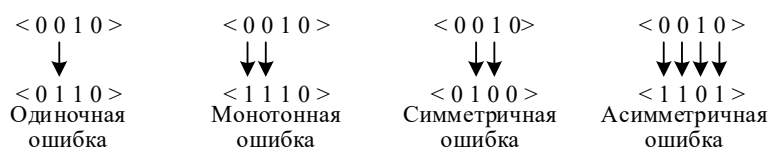


Рис. 2

Двоичные коды крайне разнообразны по своим характеристикам. Возникает задача формирования полной классификации групп выходов устройств, позволяющей на практике анализировать все возможные сочетания выходов устройства и „покрывать“ их кодами с различными характеристиками обнаружения ошибок — другими словами, выделять *контроле-пригодные группы выходов*.

При поиске Н-группы выходов не учитывается вид ошибки, возникающей на выходах выделенной группы. Однако из теории информации и кодирования известно большое количество кодов, обнаруживающих не только одиночные ошибки, но и ошибки бóльшей кратностью. Обобщим понятие Н-групп выходов.

Определение 4. *Подмножество выходов устройства образует группу δ -независимых выходов (H^δ -группу), если при возникновении любой неисправности из заданного класса в элементах внутренней структуры устройства искажается значение на $t^* \leq \delta$ ($t^* \leq t$) выходах из этой группы.*

Н-группа выходов является частным случаем H^δ -группы при $\delta=1$, т.е. является H^1 -группой. К примеру, в [24] использовано понятие H^2 -группы выходов, вычисления на которых контролируются с помощью кодов, обнаруживающих любые ошибки кратностью $d=1$ и $d=2$. В этой же работе предложена типовая структура организации СВК, подразумевающая выделение H^1 -, H^2 -, МН- и МАН-групп выходов устройства и контроль сформированных на них значений с использованием отдельных классов кодов, обнаруживающих ошибки определенного вида и конкретной кратностью.

Определение 5. *Подмножество выходов устройства образует группу v -монотонно независимых выходов (MH^v -группу), если при возникновении любой неисправности из заданного класса в элементах внутренней структуры устройства либо искажается значение только одного выхода из этой группы, либо при искажении значений сразу на нескольких выходах из группы возникает монотонная ошибка кратностью, не превышающей $d=v$.*

МН-группа согласно определению 5 может быть обозначена как MH^{m+1} -группа, так как обнаруживаются любые монотонные ошибки кратностью $d < m+1$.

Определение 6. *Подмножество выходов устройства образует группу симметрично независимых выходов (CH -группу), если при возникновении любой неисправности из заданного класса в элементах внутренней структуры устройства либо искажается значение только одного выхода из этой группы, либо при искажении значений сразу же на нескольких выходах из группы возникает симметричная ошибка.*

Определение 7. *Подмножество выходов устройства образует группу σ -симметрично независимых выходов (CH^σ -группу), если при возникновении любой неисправности из заданного класса в элементах внутренней структуры устройства либо искажается значение только одного выхода из этой группы, либо при искажении значений сразу на нескольких выходах из группы возникает симметричная ошибка кратностью, не превышающей $d=\sigma$.*

Аналогично МН-группе, CH -группа может быть также обозначена как CH^{m+1} -группа.

Определение 8. *Подмножество выходов устройства образует группу асимметрично независимых выходов (AH -группу), если при возникновении любой неисправности из заданного класса в элементах внутренней структуры устройства либо искажается значение только одного выхода из этой группы, либо при искажении значений сразу же на нескольких выходах из группы возникает асимметричная ошибка.*

Определение 9. *Подмножество выходов устройства образует группу α -асимметрично независимых выходов (AH^α -группу), если при возникновении любой неисправности из заданного класса в элементах внутренней структуры устройства либо искажается значение только одного выхода из этой группы, либо при искажении значений сразу на нескольких выходах из группы возникает асимметричная ошибка кратностью, не превышающей $d=\alpha$.*

АН-группа может быть также обозначена как AH^{m+1} -группа.

Возможны и комбинации групп выходов, образующиеся при их расширении: $МАН^{v/\alpha}$ -, $МСН^{v/\sigma}$ - и $АСН^{v/\sigma}$ -группы. Если формируется группа выходов, не допускающая никаких видов искажений, то это — просто группа независимых выходов. На рис. 3 приведены все варианты образования особых групп выходов.

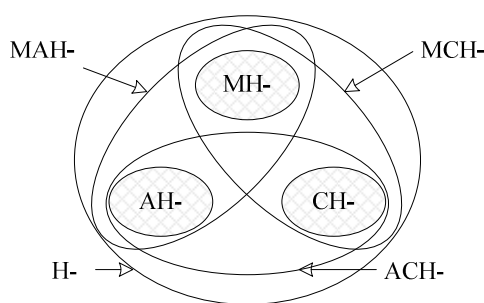


Рис. 3

Согласно трудам по теории синтеза самопроверяемых СВК, например [1, 14—16, 18—20, 22—24], основными являются H^δ -, $МН^v$ - и $МАН^{v/\alpha}$ -группы (как правило, без ограничения кратности). Выделение таких групп выходов связано с особенностями организации контроля вычислений.

Двоичные коды для контроля вычислений в особых группах выходов. В табл. 1 приведены особые группы выходов, а также наименования кодов, обнаруживающих ошибки в данных группах, и примеры соответствующих кодов.

Таблица 1

Группа	Тип кода, обнаруживающего ошибки в группе выходов	Пример кода
<i>Особые группы выходов с выделением вида допустимых ошибок</i>		
МН	UED	$S(m,k), C_{m/r}$
$МН^v$	UED^v	$SM(m,k), RSM(m,k), v < M$
АН	AED	$S(m,k), C_{m/r}$
$АН^\alpha$	AED^α	$SM(m,k), RSM(m,k), \alpha < M+2$
СН	SED	$D(m,m)$ — коды с повторением
$СН^\sigma$	SED^σ	$SWC(m,k), H(m,k), \sigma < 4$
МАН	UAED	$S(m,k), C_{m/r}$
$МАН^{v/\alpha}$	$UAED^{v/\alpha}$	$SM(m,k), RSM(m,k), v < M, \alpha < M+2$
МСН	USED	$D(m,m)$
$МСН^{v/\sigma}$	$USED^{v/\sigma}$	$SWC(m,k), H(m,k), v < 3, \sigma < 4$
АСН	ASED	$D(m,m)$
$АСН^{v/\sigma}$	$ASED^{v/\sigma}$	$SWC(m,k), H(m,k), \alpha < 3, \sigma < 4$
<i>Особые группы выходов с выделением кратностей допустимых ошибок</i>		
H	I	$P(m,k)$
H^δ	I^δ	$P(m,k), \delta=1; SWC(m,k), H(m,k), \delta=2; Perm(m,k), m < 10, \delta=2; WT(2^i), \delta=m-1$

Вычисления значений на выходах H^δ -групп контролируются с помощью (m,k,δ) -кодов (m и k — количество информационных и контрольных разрядов соответственно), обнаруживающих любые ошибки кратностью $d \leq \delta$. Приведем некоторые их примеры. К $(m,k,1)$ -кодам относятся коды паритета ($P(m,k)$ -коды) [25] и любые помехозащищенные коды (коды паритета имеют наиболее простые кодеры с одним контрольным разрядом, что определяет их приоритет перед остальными кодами). К $(m,k,2)$ -кодам относятся коды Хэмминга $H(m,k)$ [26] и их модификации — коды с суммированием без использования операции переноса $SWC(m,k)$ [27] и перестановочные коды $Perm(m,k)$ до значения $m < 10$ [28]. Причем коды с суммированием без переноса имеют наиболее простые реализации кодеров среди всех трех $(m,k,2)$ -кодов, что также целесообразно учитывать при синтезе СВК. Известны также и коды с обнаружением

любых ошибок кратностью $d < m$. Такие коды описаны, например, в [8] и обозначены как $WT(2^i)$ -коды.

MH^v -группы контролируются с помощью так называемых $UED(m, k)$ -кодов, обнаруживающих любые монотонные ошибки, и $UED^v(m, k)$ -кодов, обнаруживающих любые монотонные ошибки кратностью до $d = v$. К $UED(m, k)$ -кодам относятся классические коды Бергера $S(m, k)$ [17] и равновесные коды $C_{m/r}$ [29]. К $UED^v(m, k)$ -кодам относятся, например, классические модульные коды с суммированием — $SM(m, k)$ -коды при $v < M$ и модифицированные модульные коды с суммированием — $RSM(m, k)$ -коды при $v < M$, где M — модуль, используемый при построении кода [9].

$MAH^{v/\alpha}$ -группы контролируются с помощью так называемых $UAED(m, k)$ -кодов. Данные коды обнаруживают как любые монотонные, так и любые асимметричные ошибки в информационных векторах. Также могут быть использованы $UAED^{v/\alpha}(m, k)$ -коды, обнаруживающие монотонные ошибки кратностью до $d < v$ и все асимметричные ошибки кратностью до $d < \alpha$. К $UAED(m, k)$ -кодам относятся те же классические коды Бергера и равновесные коды. К $UAED^{v/\alpha}(m, k)$ -кодам относятся, например, классические модульные и модифицированные модульные коды с суммированием — $SM(m, k)$ - и $RSM(m, k)$ -коды при $v < M$ и $\alpha < M + 2$ [9].

Отметим, что в научной литературе не выделяются коды, ориентированные на обнаружение любых симметричных ошибок (известны только коды с обнаружением симметричных ошибок кратностью до определенной величины). В [30] установлена нижняя граница числа разрядов в контрольных векторах, необходимых для наделения кода свойством обнаружения любых симметричных ошибок:

$$k < \left\lceil \log_2 C_m^{\lfloor m/2 \rfloor} \right\rceil,$$

где $\lceil \dots \rceil$ — целое сверху от вычисляемого значения, $\lfloor \dots \rfloor$ — целое снизу.

Отсюда следует, что для диапазона значений $m = 3 \dots 8$ число $k \geq m - 1$, а для диапазона $m = 9 \dots 20$ — $k \geq m - 2$. Таким образом, коды с обнаружением любых симметричных ошибок (SED-коды) весьма избыточны и близки по данному показателю к кодам с повторением. Добавление SED-коду свойства обнаружения монотонных или асимметричных ошибок может только увеличить избыточность кода, но не уменьшить ее. Таким образом, все коды SED-, USED-, ASED-типов имеют избыточность, близкую к дублированию, что не позволяет использовать их эффективно при решении задач построения систем с обнаружением неисправностей. На первый план в этом случае выходит дублирование с контролем вычислений значений на одноименных выходах различных устройств, реализующих аналогичные функции.

Можно сделать следующий вывод: на этапе проектирования СВК могут быть выделены особые группы выходов и подобраны коды, обладающие особенностями обнаружения ошибок определенного вида и конкретной кратностью. Отдельно следует рассматривать критерий, по которому будут выделяться группы выходов и коды с определенными характеристиками обнаружения ошибок.

Принципы выделения особых групп выходов. На практике для установления известных видов особых групп выходов используются следующие положения.

Для поиска групп независимых выходов необходимо проверить следующее утверждение [1].

Утверждение 1. Множество выходов устройства $\{f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_p}\}$, $i_1, i_2, \dots, i_p \in \{1, 2, \dots, m\}$, образует H -группу в случае, если для каждой пары выходов $\{f_{i_a}, f_{i_b}\}$, $a, b \in \{1, 2, \dots, p\}$, и для каждого элемента G_q схемы устройства выполняется условие

$$\frac{\partial f_{i_a}}{\partial y_q} \frac{\partial f_{i_b}}{\partial y_q} = 0, \quad (1)$$

где f_{i_a} и f_{i_b} — функции, реализуемые на соответствующих выходах устройства; y_q — функция, реализуемая на выходе конкретного элемента G_q , на котором проявляется ошибка, вызванная неисправностью (неисправности заданы конкретной моделью на этапе синтеза самопроверяемого устройства).

Напомним, что в данном случае рассматривается модель одиночных константных неисправностей выходов внутренних логических элементов структуры устройства.

Левая часть выражения (1) (произведение булевых производных) устанавливает входные комбинации, при поступлении которых на входы устройства одновременно искажаются оба выхода из пары $\{f_{i_a}, f_{i_b}\}$, $a, b \in \{1, 2, \dots, p\}$. Эти комбинации определяются из уравнения

$$\frac{\partial f_{i_a}}{\partial y_q} \frac{\partial f_{i_b}}{\partial y_q} = 1. \text{ Если таких комбинаций нет, т.е. выполняется условие (1), то выходы образуют}$$

Н-группу. Для элементов, не связанных путями с двумя и более выходами устройства, выражение (1) будет выполняться для любой пары выходов. Поэтому при проверке условия (1) могут рассматриваться не все элементы в структуре устройства, а только те, которые связаны путями с двумя и более его выходами.

Поиск Н-группы выходов осуществляется последовательно: от поиска пар групп независимых выходов на всем их множестве до расширения этих групп с числом выходов, равным трем и более. Во всех Н-группах каждая пара выходов должна удовлетворять условию (1).

Аналогично для установления того факта, что группа выходов является МН-группой, используется следующее утверждение [18, 19].

Утверждение 2. Множество выходов устройства $\{f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_p}\}$, $i_1, i_2, \dots, i_p \in \{1, 2, \dots, m\}$, образует МН-группу в случае, если для каждой пары выходов $\{f_{i_a}, f_{i_b}\}$, $a, b \in \{1, 2, \dots, p\}$, и для каждого элемента G_q схемы устройства выполняется условие

$$\frac{\partial f_{i_a}}{\partial y_q} \frac{\partial f_{i_b}}{\partial y_q} (f_{i_a} \oplus f_{i_b}) = 0. \quad (2)$$

Произведение булевых производных определяет входные комбинации, на которых одновременно искажаются выходы из пары $\{f_{i_a}, f_{i_b}\}$, $a, b \in \{1, 2, \dots, p\}$, а выражение в скобках определяет, совпали ли значения на выходах до их искажения (только при совпадении возможно возникновение монотонной ошибки). При поиске МН-групп выходов также можно исключить из рассмотрения логические элементы, связанные путями только с одним выходом устройства.

Поиск МН-группы выходов устройства осуществляется аналогично поиску Н-групп.

МН-группы могут быть расширены до МАН-групп, для поиска которых используется более сложное выражение, приведенное в [22].

В любом случае при определении особых групп выходов некоторого устройства используется последовательный анализ его выходов с расширением их числа в выбираемых подмножествах от 2 до m и устанавливается возможность возникновения ошибки того или иного вида.

Расширим этот подход для поиска всех особых групп выходов устройства.

Утверждение 3. Ошибка кратностью d на выходах $\{f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_d}\}$, $i_1, i_2, \dots, i_d \in \{1, 2, \dots, m\}$, вызванная неисправностью на выходе элемента G_q в структуре некоторого устройства, возникает при условии

$$U^d = \frac{\partial f_{i_1}}{\partial y_q} \frac{\partial f_{i_2}}{\partial y_q} \dots \frac{\partial f_{i_d}}{\partial y_q} \neq 0. \quad (3)$$

Произведение булевых производных в формуле (3) определяет условия, при которых на d выходах устройства будут возникать одновременные искажения. Если данное произведение не равно нулю, то существуют входные комбинации, на которых одновременно искажаются все выходы $\{f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_d}\}$, $i_1, i_2, \dots, i_d \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Условие (3) должно проверяться для всех элементов G_q . Для упрощения процедуры поиска зависимых выходов предварительно исключают из полного множества элементов те из них, которые связаны с меньшим, чем d , числом путей, ведущих к выходам $\{f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_d}\}$, $i_1, i_2, \dots, i_d \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Теорема 1. Множество выходов устройства $\{f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_p}\}$, $i_1, i_2, \dots, i_p \in \{1, 2, \dots, m\}$, $p \geq \delta + 1$, образует H^δ -группу, если для каждого из $C_p^{\delta+1}$ подмножеств, образованных $\delta + 1$ выходами, и для каждого элемента G_q выполняется условие

$$\frac{\partial f_{i_1}}{\partial y_q} \frac{\partial f_{i_2}}{\partial y_q} \dots \frac{\partial f_{i_{\delta+1}}}{\partial y_q} = 0. \quad (4)$$

Доказательство теоремы 1 приведено в [31].

Теорема 2. Ошибка кратностью $d \geq 2$ на выходах $\{f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_d}\}$, $i_1, i_2, \dots, i_d \in \{1, 2, \dots, m\}$, вызванная неисправностью на выходе элемента G_q , проявляется при возникновении соответствующих входных комбинаций в следующем виде:

а) монотонной ошибки — в случае если

$$\left(\frac{\partial f_{i_1}}{\partial y_q} \frac{\partial f_{i_2}}{\partial y_q} \dots \frac{\partial f_{i_d}}{\partial y_q} \right) \bigvee_{f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_d} \in W^v} f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_d} \neq 0, \quad (5)$$

где выражение W^v определяет множество выходных векторов с весами, равными нулю (их число равно C_d^0) и $r=d$ (их число равно C_d^d): $W^v = \{\bar{f}_{i_1} \bar{f}_{i_2} \dots \bar{f}_{i_d}; f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_d}\}$;

б) симметричной ошибки — в случае если d — четное и если

$$\left(\frac{\partial f_{i_1}}{\partial y_q} \frac{\partial f_{i_2}}{\partial y_q} \dots \frac{\partial f_{i_d}}{\partial y_q} \right) \bigvee_{f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_d} \in W^\sigma} f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_d} \neq 0, \quad (6)$$

где выражение W^σ определяет множество выходных векторов с весами $r=d/2$ (их число равно $C_d^{d/2}$);

в) асимметричной ошибки — в случае если $d \geq 3$ и если

$$\left(\frac{\partial f_{i_1}}{\partial y_q} \frac{\partial f_{i_2}}{\partial y_q} \dots \frac{\partial f_{i_d}}{\partial y_q} \right) \bigvee_{f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_d} \in W^\alpha} f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_d} \neq 0, \quad (7)$$

где выражение W^α определяет множество выходных векторов с весами $r \neq 0$, $r \neq d/2$ и $r \neq d$ (их число определяется величиной $2^d - (C_d^0 + C_d^{d/2} + C_d^d)$).

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим логический элемент G_q в структуре устройства с выходом y_q . Ошибка будет иметь кратность d в случае, если

$U^d = \frac{\partial f_{i_1}}{\partial y_q} \frac{\partial f_{i_2}}{\partial y_q} \dots \frac{\partial f_{i_d}}{\partial y_q} \neq 0$. Вид ошибки определяется значениями выходов $\{f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_d}\}$,

$i_1, i_2, \dots, i_d \in \{1, 2, \dots, m\}$, до искажения. При искажении значений на d выходах монотонная ошибка возникает только в случае, если все значения выходов были равными до искажения.

Множество W^v как раз содержит все такие векторы. При искажении значений на четном числе выходов (при четном d) симметричная ошибка возникает только в случае, если половина значений выходов равна нулю и половина — единице. Множество W^σ включает в себя все такие векторы. Поскольку все ошибки подразделяются на одиночные, монотонные, симметричные и асимметричные, а в положении теоремы говорится об ошибках кратностью $d \geq 2$, при искажении значений выходов $\{f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_d}\}$, $i_1, i_2, \dots, i_d \in \{1, 2, \dots, m\}$, все остальные варианты векторов, присутствующие в множестве W^α , определяют условия возникновения неравного числа искажений (количества нулей и единиц), т.е. условия возникновения асимметричных ошибок.

Достаточность. Кратность ошибки определяется только выражением

$U^d = \frac{\partial f_{i_1}}{\partial y_q} \frac{\partial f_{i_2}}{\partial y_q} \dots \frac{\partial f_{i_d}}{\partial y_q} \neq 0$. Принадлежность к конкретному виду ошибок — только выражениями

$$F^v = \bigvee_{f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_d} \in W^v} f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_d}, F^\sigma = \bigvee_{f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_d} \in W^\sigma} f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_d} \text{ и } F^\alpha = \bigvee_{f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_d} \in W^\alpha} f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_d} \blacksquare.$$

Из формул (1) — (7) непосредственно следует способ установления кратности и вида ошибок, возникающих на выходах цифровых устройств. Особые группы выходов устройства могут быть определены по следующим правилам.

Алгоритм 1. Последовательность выявления особых групп выходов.

Шаг 1. Рассматриваются все сочетания $\gamma \geq 2$ выходов устройства из полного их множества и образуются γ -группы выходов. Число рассматриваемых γ -групп выходов равно

$$\sum_{\gamma=2}^m C_m^\gamma = 2^m - m - 1.$$

Шаг 2. γ -группы ранжируются по возрастанию числа γ .

Шаг 3. Полагается $\gamma^* = 2$.

Шаг 4. Условие (3) проверяется для всех $2 \leq d \leq \gamma^*$. Фиксируются и ранжируются в порядке возрастания значения d , для которых $U^d \neq 0$, — $D_h = \{d_1, d_2, \dots, d_h\}$.

Шаг 5. Выбирается первый элемент множества D_h : $d^* = d_1$.

Шаг 6. Проверяется условие (5), определяющее, является ли ошибка кратностью d^* монотонной.

Шаг 7. Если d — четное, то проверяется условие (6), определяющее, является ли ошибка кратностью d^* симметричной; если d — нечетное, то переход к следующему пункту.

Шаг 8. Проверяется условие (7), определяющее, является ли ошибка кратностью d^* асимметричной.

Шаг 9. Проверяется, рассмотрены ли все элементы множества D_h : если нет, то осуществляется переход к рассмотрению следующего элемента данного множества и повторение пп. 6—8; если да, то переход к следующему пункту.

Шаг 10. Полагается $\gamma^* := \gamma^* + 1$.

Шаг 11. $\gamma^* = m$? Если нет, то переход к п. 4; если да, то переход к следующему пункту.

Шаг 12. Для каждой γ -группы фиксируются минимальные кратности обнаруживаемых ошибок каждого вида и определяется принадлежность к конкретной особой группе.

После реализации алгоритма все γ -группы выходов идентифицируются с какой-либо особой группой, либо устанавливается, что та или иная группа особой не является.

К примеру, определим все особые группы выходов для устройства, изображенного на рис. 4, при рассмотрении модели одиночной константной неисправности выходов внутренних логических элементов. Отметим также, что согласно [32, теорема 3] это позволит построить и самопроверяемое устройство относительно одиночных неисправностей на входах логических элементов, так как если неисправность элемента не вызывает на выходе схемы ошибки определенного типа, то не вызывает ошибки такого же типа и одиночная неисправность на входе этого же элемента. Кроме того, ограничимся поиском только H^δ -, MH^v - и $MAH^{v/a}$ -групп среди особых групп выходов. При организации СВК наиболее эффективно применение именно этих особых групп.

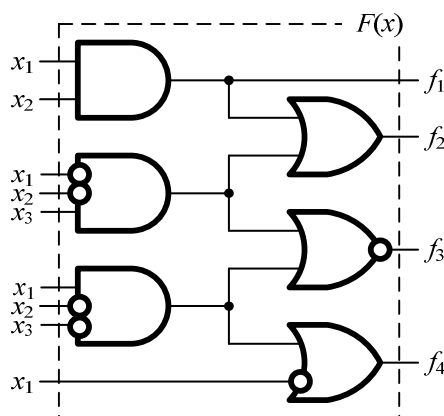


Рис. 4

Результаты исследования структуры заданного устройства приведены в табл. 2 и на рис. 5. На рис. 5 выделен каждый из вариантов выбора групп и их принадлежность к конкретной особой группе указана кружком.

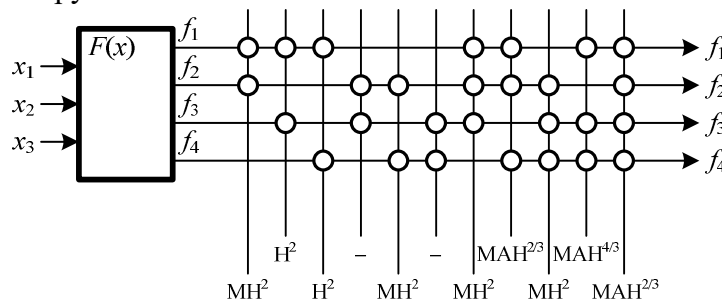


Рис. 5

Таблица 2

Группа	Выходы	Вид группы
A	f_1, f_2	MH^2
B	f_1, f_3	H^2
C	f_1, f_4	H^2
D	f_2, f_3	—
E	f_2, f_4	MH^2
F	f_3, f_4	—
G	f_1, f_2, f_3	MH^2
H	f_1, f_2, f_4	$MAH^{2/3}$
I	f_2, f_3, f_4	MH^2
J	f_1, f_3, f_4	$MAH^{4/3}$
K	f_1, f_2, f_3, f_4	$MAH^{2/3}$

Алгоритм 2. Правила синтеза СВК на основе выделения особых групп выходов.

Шаг 1. Определяется показатель структурной избыточности для устройства с СВК, реализованной по методу дублирования — L_D .

Шаг 2. Формируется таблица покрытий выходов устройства особыми группами.

Шаг 3. Определяются все варианты покрытий выходов устройства.

Шаг 4. Если какие-либо выходы устройства не вошли ни в одну особую группу, то они дублируются в СВК.

Шаг 5. Для каждого варианта покрытия подбираются коды, входящие в определенный класс.

Шаг 6. Определяется требуемое по выбранному критерию покрытие (например, по минимальному числу групп в покрытии или минимальному суммарному числу контрольных разрядов кодов, необходимых для реализации СВК для каждой особой группы).

Шаг 7. Производится синтез СВК для выбранного покрытия и выбранных кодов в требуемом элементном базисе.

Шаг 8. Проверяется, является ли СВК самопроверяемой относительно заданной модели неисправностей: если да, то переход к следующему пункту, в противном случае выбирается другой вариант покрытия.

Шаг 9. Определяется показатель структурной избыточности устройства с СВК — L .

Шаг 10. Проверяется $L < L_D$? Если да, то переход к следующему пункту, если нет, то осуществляется поиск покрытия, позволяющего достичь указанного неравенства.

Шаг 11. СВК построена.

Для приведенного выше примера (см. рис. 4) таблица покрытий выходов особыми группами имеет вид, представленный в табл. 3.

Таблица 3

Выход	Группа										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
f_1	×	×	×				×	×		×	×
f_2	×				×		×	×	×		×
f_3		×					×		×	×	×
f_4			×		×			×	×	×	×

Для получения всех вариантов покрытий используется метод Петрика [33]. Для этого составляется выражение вида конъюнкция дизъюнкций всех символов (наименований групп — см. табл. 3) для каждой строки (f_i), в графе для которых проставлен знак покрытия „×“. Далее выражение представляется в дизъюнктивной нормальной форме:

$$\begin{aligned}
 Q &= (A \vee B \vee C \vee G \vee H \vee J \vee K)(A \vee E \vee G \vee H \vee I \vee K) \& \\
 &\& (B \vee G \vee I \vee J \vee K)(C \vee E \vee H \vee I \vee J \vee K) = \\
 &= (A \vee G \vee H \vee K \vee BE \vee BI \vee CE \vee CI \vee JE \vee JI)(I \vee J \vee K \vee BC \vee BE \vee BH \vee GC \vee GE \vee GH) = \\
 &= AI \vee GI \vee HI \vee BI \vee CI \vee JI \vee AJ \vee GJ \vee HJ \vee JE \vee \\
 &\vee K \vee ABC \vee BE \vee HB \vee GC \vee GE \vee GH.
 \end{aligned}$$

Конечное выражение содержит все возможные варианты покрытия выходов рассматриваемого устройства особыми группами. Для приведенного примера их 17, при этом одно покрытие содержит только один символ, 15 покрытий — два символа и одно покрытие — три символа.

Для данного примера варианты покрытий сравним по критерию количества символов, что позволит выделить наименьшее число групп на множестве выходов. В данном случае покрытие K позволяет решить поставленную задачу. Покрытие K — это все выходы, образующие $MAN^{2/3}$ -группу. Вычисления в такой группе контролируются с помощью $UAED^{v/a}(m,k)$ -кода.

К множеству таких кодов относятся, например, коды $S4(4,2)$ и $S3(4,2)$. Для кода $S4(4,2)$ проще обеспечивается полная самопроверяемость кодера, поэтому его целесообразно выбрать для контроля заданной схемы.

Далее следовало бы проверить эффективность применения выбранного покрытия и кодов для контроля по сравнению с дублированием. Для рассматриваемого примера этого делать не будем, так как он демонстрирует только принцип выбора способа покрытия и способа организации СВК.

Представленный пример является элементарным. Однако для реальных устройств может существовать несколько вариантов покрытий, предполагающих использование кодов с одинаковым числом контрольных разрядов. Возникает проблема выбора такого покрытия, которое позволит построить наименьшую по сложности самопроверяемую СВК. При числе выходов m максимальное количество рассматриваемых групп определяется величиной

$$\sum_{\gamma=2}^m C_m^{\gamma} = 2^m - m - 1. \text{ Соответственно, число символов покрытия не будет превышать указанной}$$

величины. Из приведенного выражения следует, что количество вариантов сравнений определяется числом выходов устройства. Число же самих покрытий не может превышать вели-

$$\text{чины } \sum_{j=1}^m C_{2^m-m}^j = 2^{2^m-m} - 1. \text{ Это верхняя оценка. В реальности число покрытий будет существ-}$$

венно меньше. Тем не менее отсюда следует главный недостаток рассматриваемого подхода: необходимо в каждом конкретном случае рассматривать возможность построения большого числа СВК, выбирая при этом наилучший вариант по сложности технической реализации, обеспечивающий к тому же реализацию самопроверяемого устройства. Здесь возникает задача поиска такого критерия по выбору покрытия, который позволит сократить число вычислительных процедур. К сожалению, эта задача пока остается нерешенной. На практике при большом числе способов покрытия выходов можно ограничиться выбором любого покрытия, дающего минимальное число особых групп, либо же любого, дающего минимальное суммарное число контрольных разрядов для всех кодов, обеспечивающих возможность синтеза самопроверяемого устройства (что и отмечено в алгоритме 2).

Обобщенная структура организации СВК на основе выделения особых групп выходов. Обобщенная структура организации СВК по особым группам выходов представлена на рис. 6. На схеме не показан вывод рабочих функций $f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f_m$ во внешние системы, а приведена только контрольная часть. В структуре организации СВК подразумевается выделение только H^{δ} -, MH^{ν} - и $MAH^{\nu/\alpha}$ -групп. Каждая особая группа контролируется на основе избыточного кода, обнаруживающего соответствующие виды и кратности ошибок, — I^{δ} -, $UAED^{\nu/\alpha}$ и $UAED^{\nu/\alpha}$ -кода. Такие типы кодов широко известны в литературе, их примеры даны в табл. 1 и приводятся в [9, 10]. Выходы же устройства $F(x)$, которые не входят ни в одно покрытие, дублируются в СВК.

Для каждой особой группы реализуется своя СВК с двумя контрольными выходами z^0 и z^1 , на которых формируется парафазный сигнал при отсутствии ошибок в вычислениях; нарушение парафазности говорит об ошибках в вычислениях на выходах объекта диагностирования либо одного из компонентов СВК. В целях получения одной группы контрольных выходов парафазные выходы отдельных СВК подключаются ко входам самопроверяемого компаратора TRC [7, 13].

Необходимо отметить следующую особенность представленной структуры. При построении отдельных СВК для особых групп выходов применяются два блока: блок контрольной логики $G(x)$ и полностью самопроверяемый тестер выбранного кода TSC [34, 35]. TSC для каждого кода имеет типовую структуру в выбранном элементном базисе и реализуется

по одному из известных методов, описанных, например, в [36, 37]. Блок $G(x)$ каждой СВК является уникальным по своей структуре и строится путем совместной оптимизации каскада, состоящего из подсистемы устройства $F(x)$, реализующей функции выделенной особой группы, и кодера выбранного кода [8]. Для снижения структурной избыточности СВК блоки $G(x)$ в отдельных схемах могут быть реализованы совместно. Также следует добавить, что при синтезе СВК может быть использован не только традиционный метод вычисления контрольных разрядов, но и метод логического дополнения (логической коррекции сигналов), позволяющий гораздо проще обеспечивать полную самопроверяемость СВК. Данный метод подробно описан в [20, 38, 39].

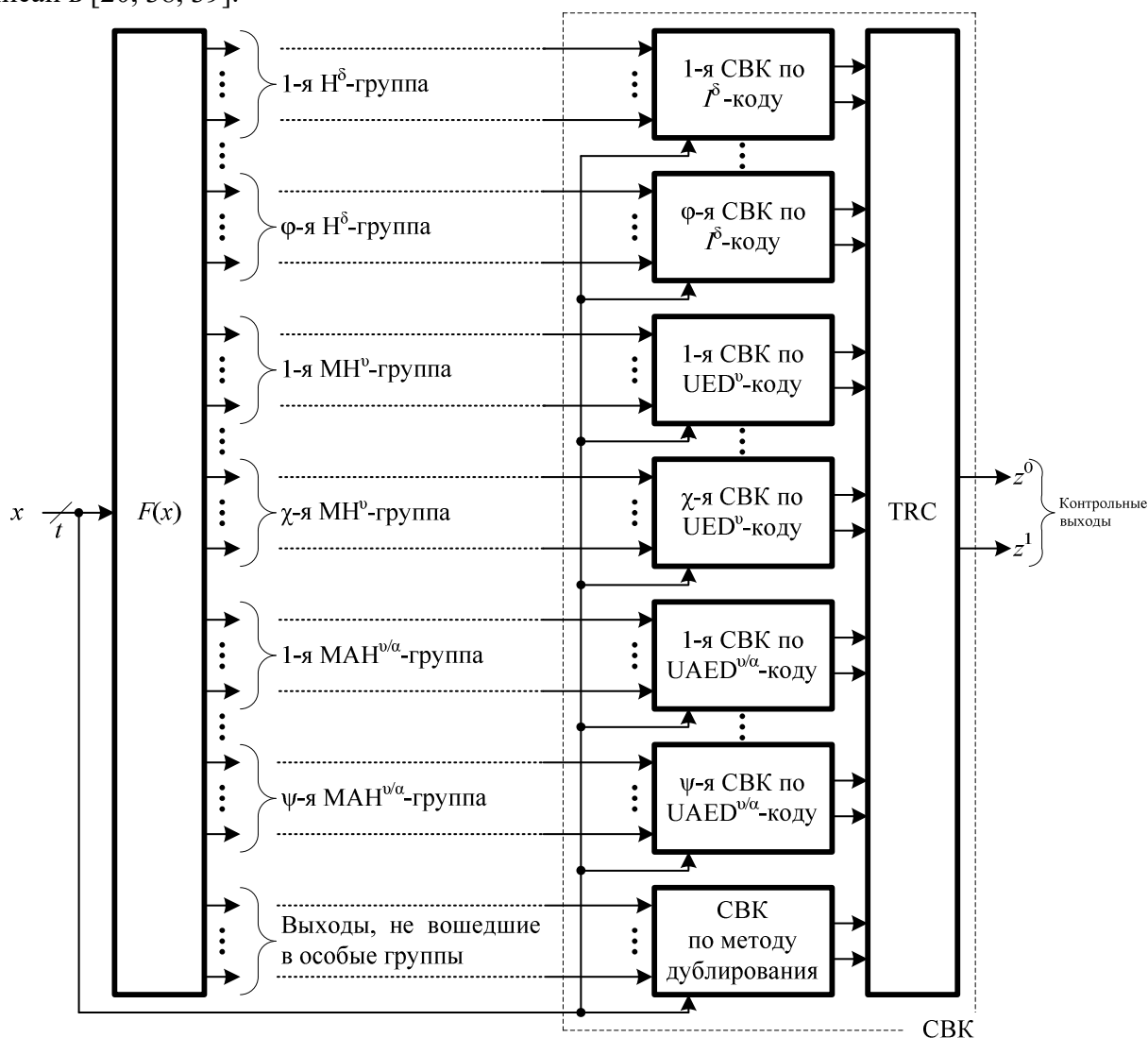


Рис. 6

Отметим, что представленная структура отличается от приведенной в [24] расширенным количеством групп (включены H^δ -, MH^ν - и $MAN^{\nu/\alpha}$ -группы) и позволяет синтезировать СВК не только по нескольким избыточным кодам, но и с учетом разных способов их построения. Кроме того, по сути, изменен сам подход к построению СВК. Ранее поиск и расширение групп производились, начиная с H -группы, а затем и MH - и MAN -групп. Теперь же рассматриваются любые возможности выделения особых групп выходов и определяются различные варианты покрытий выходов данными группами. Это существенно увеличивает число способов построения СВК для цифровых устройств.

Заключение. Представленный подход к организации СВК на основе выделения особых групп выходов объекта диагностирования существенно расширяет число вариантов построе-

ния полностью самопроверяемых устройств и позволяет широко использовать основные характеристики двоичных избыточных кодов. В свою очередь, выбор для каждой конкретной особой группы того или иного варианта кодирования дает возможность построения СВК с минимальной сложностью технической реализации. При этом за счет использования различных подходов к синтезу СВК можно добиться свойства самопроверяемости структуры даже в тех случаях, когда это невозможно при использовании дублирования. Важно также отметить, что при построении самопроверяемого устройства на основе выделения полного множества особых групп выходов могут рассматриваться и другие модели неисправностей.

Предложенный подход основывается на анализе структуры объекта диагностирования и возможностей влияния неисправностей на его выходы. Именно за счет этого удастся снизить структурную избыточность СВК при сохранении свойства самопроверяемости. К сожалению, в этом кроется и недостаток подхода: требуется проводить вычисления для каждой неисправности из заданной модели, а число особых групп экспоненциально зависит от количества выходов объекта диагностирования. Также увеличение числа вычислительных процедур может возникнуть при большой сложности структуры самого объекта диагностирования (большом числе элементов и сложной конфигурации связей между ними, входами и выходами устройства). При современной мощности вычислительных систем практическим ограничением оказывается число выходов $m=30\ldots 35$. При большем числе выходов устройства $F(x)$ эффективными могут оказаться методы декомпозиции и реализации нескольких структур (см. рис. 6).

Рассмотренный подход носит общий характер и никак не ориентирован на какую-либо элементную базу, что делает его универсальным в смысле практического применения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Согомонян Е. С., Слабаков Е. В. Самопроверяемые устройства и отказоустойчивые системы. М.: Радио и связь, 1989. 208 с.
2. Микони С. В. Общие диагностические базы знаний вычислительных систем. СПб: СПИИРАН, 1992. 234 с.
3. Pradhan D. K. Fault-Tolerant Computer System Design. N. Y.: Prentice Hall, 1996. 560 p.
4. Lala P. K. Self-Checking and Fault-Tolerant Digital Design. San Francisco: Morgan Kaufmann Publ., 2001. 216 p.
5. Fujiwara E. Code Design for Dependable Systems: Theory and Practical Applications. John Wiley & Sons, 2006. 720 p.
6. Дрозд А. В., Харченко В. С., Антощук С. Г., Дрозд Ю. В., Дрозд М. А., Сулима Ю. Ю. Рабочее диагностирование безопасных информационно-управляющих систем / Под ред. А. В. Дрозда и В. С. Харченко. Харьков: НАУ им. Н. Е. Жуковского „ХАИ“, 2012. 614 с.
7. Nikolos D. Self-Testing Embedded Two-Rail Checkers // Chapter 7 in On-Line Testing for VLSI. 1998. P. 69—79. DOI 10.1007/978-1-4757-60-69-9_7.
8. Сапожников В. В., Сапожников Вл. В., Ефанов Д. В., Дмитриев В. В. Новые структуры систем функционального контроля логических схем // Автоматика и телемеханика. 2017. № 2. С. 127—143.
9. Сапожников В. В., Сапожников Вл. В., Ефанов Д. В. Коды с суммированием для систем технического диагностирования. Т. 1. Классические коды Бергера и их модификации. М.: Наука, 2020. 383 с.
10. Сапожников В. В., Сапожников Вл. В., Ефанов Д. В. Коды с суммированием для систем технического диагностирования. Т. 2. Взвешенные коды с суммированием. М.: Наука, 2021. 455 с.
11. Кодирование информации (двоичные коды) / Н. Т. Березюк, А. Г. Андрущенко, С. С. Моцицкий, В. И. Глушков, М. М. Бенеша, В. А. Гаврилов; Под ред. Н. Т. Березюка. Харьков: Вища школа, 1978. 252 с.
12. Багдади А. А. А., Хаханов В. И., Литвинова Е. И. Методы анализа и диагностирования цифровых устройств (аналитический обзор) // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. 2014. № 166. С. 59—74.
13. Carter W. C., Duke K. A., Schneider P. R. Self-Checking Error Checker for Two-Rail Coded Data. Pat. 747533, US, Jan. 26, 1971.

14. *Sogomonyan E. S., Gössel M.* Design of Self-Testing and On-Line Fault Detection Combinational Circuits with Weakly Independent Outputs // *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*. 1993. Vol. 4, iss. 4. P. 267—281. DOI: 10.1007/BF00971975.
15. *Busaba F. Y., Lala P.K.* Self-Checking Combinational Circuit Design for Single and Unidirectional Multibit Errors // *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*. 1994. Iss. 1. P. 19—28. – DOI: 10.1007/BF00971960.
16. *Matrosova A. Yu., Ostanin S. A.* Self-Checking Synchronous Sequential Circuit Design for Unidirectional Error // *Proc. of the IEEE European Test Workshop (ETW'98)*, Sitges, Barcelona, Spain, 27—29 May 1998.
17. *Berger J. M.* A Note on Error Detecting Codes for Asymmetric Channels // *Information and Control*. 1961. Vol. 4, iss. 1. P. 68—73. DOI: 10.1016/S0019-9958(61)80037-5.
18. *Morosow A., Saposhnikov V. V., Saposhnikov Vl. V., Goessel M.* Self-Checking Combinational Circuits with Unidirectionally Independent Outputs // *VLSI Design*. 1998. Vol. 5, iss. 4. P. 333—345. DOI: 10.1155/1998/20389.
19. *Saposhnikov V. V., Morosov A., Saposhnikov Vl. V., Göessel M.* A New Design Method for Self-Checking Unidirectional Combinational Circuits // *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*. 1998. Vol. 12, iss. 1—2. P. 41—53. DOI: 10.1023/A:1008257118423.
20. *Göessel M., Ocheretny V., Sogomonyan E., Marienfeld D.* New Methods of Concurrent Checking. Dordrecht: Springer Science+Business Media B.V., 2008. 184 p.
21. *Сапожников В. В., Сапожников Вл. В., Ефанов Д. В.* Классификация ошибок в информационных векторах систематических кодов // *Изв. вузов. Приборостроение*. 2015. Т. 58, № 5. С. 333—343. DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-5-333-343.
22. *Ефанов Д. В., Сапожников В. В., Сапожников Вл. В.* Условия обнаружения неисправности логического элемента в комбинационном устройстве при функциональном контроле на основе кода Бергера // *Автоматика и телемеханика*. 2017. № 5. С. 152—165.
23. *Efanov D. V., Sapozhnikov V. V., Sapozhnikov Vl. V.* Organization of a Fully Self-Checking Structure of a Combinational Device Based on Searching for Groups of Symmetrically Independent Outputs // *Automatic Control and Computer Sciences*. 2020. Vol. 54, iss. 4. P. 279—290. – DOI: 10.3103/S0146411620040045.
24. *Ефанов Д. В., Сапожников В. В., Сапожников Вл. В.* Синтез самопроверяемых комбинационных устройств на основе выделения специальных групп выходов // *Автоматика и телемеханика*. 2018. № 9. С. 79—94.
25. *Аксенова Г. П.* Метод синтеза схем встроенного контроля для автоматов с памятью // *Автоматика и телемеханика*. 1973. № 2. С. 109—116.
26. *Hamming R. W.* Error Detecting and Correcting Codes // *Bell System Technical Journal*. 1950. N 29 (2). P. 147—160.
27. *Sapozhnikov V., Sapozhnikov Vl., Efanov D., Dmitriev V.* Weighted Sum Code Without Carries – is an Optimum Code with Detection of Any Double Errors in Data Vectors // *Proc. of the 14th IEEE East-West Design & Test Symp. (EWDTS'2016)*, Yerevan, Armenia, Oct. 14—17, 2016. P. 134—141. DOI: 10.1109/EWDTS.2016.7807686.
28. *Sapozhnikov V., Efanov D., Sapozhnikov Vl., Dmitriev V.* New Sum Code for Effective Detection of Double Errors in Data Vectors // *Proc. of the 13th IEEE East-West Design & Test Symp. (EWDTS'2015)*, Batumi, Georgia, Sept. 26—29, 2015. P. 154—159. DOI: 10.1109/EWDTS.2015.7493123.
29. *Freiman C. V.* Optimal Error Detection Codes for Completely Asymmetric Binary Channels // *Information and Control*. 1962. Vol. 5, iss. 1. P. 64—71. DOI: 10.1016/S0019-9958(62)90223-1.
30. *Сапожников В. В., Сапожников Вл. В., Ефанов Д. В.* Коды с суммированием, обнаруживающие любые симметричные ошибки // *Электронное моделирование*. 2017. Т. 39, № 3. С. 47—60.
31. *Ефанов Д. В., Сапожников В. В., Сапожников Вл. В.* Модифицированные коды с суммированием взвешенных переходов в системах функционального контроля комбинационных схем // *Тр. Института системного программирования РАН*. 2017. Т. 29, № 5. С. 39—60. DOI: 10.15514/ISPRAS-2017-29(5)-3.
32. *Сапожников В. В., Сапожников Вл. В., Ефанов Д. В.* Обнаружение неисправностей в комбинационных логических схемах на основе их контроля по группам симметрично независимых выходов // *Электронное моделирование*. 2020. Т. 42, № 2. С. 3—23. DOI: 10.15407/emodel.42.02.003.
33. *Закревский А. Д., Поттосин Ю. В., Черемисина Л. Д.* Логические основы проектирования дискретных устройств. М.: Физматлит, 2007. 592 с.

34. Nicolaidis M., Zorian Y. On-Line Testing for VLSI – A Compendium of Approaches // Journal of Electronic Testing: Theory and Application. 1998. Vol. 12, iss. 1—2. P. 7—20. DOI: 10.1023/A:1008244815697.
35. Mitra S., McCluskey E. J. Which Concurrent Error Detection Scheme to Choose? // Proc. of Intern. Test Conf., Atlantic City, NJ, USA, 03—05 Oct. 2000, P. 985—994. DOI: 10.1109/TEST.2000.894311.
36. Сапожников В. В., Сапожников В. В. Самопроверяемые дискретные устройства. СПб: Энергоатомиздат, 1992. 224 с.
37. Piestrak S. J. Design of Self-Testing Checkers for Unidirectional Error Detecting Codes. Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 1995. 111 p.
38. Гессель М., Морозов А. В., Сапожников В. В., Сапожников Вл. В. Логическое дополнение – новый метод контроля комбинационных схем // Автоматика и телемеханика. 2003. № 1. С. 167—176.
39. Гессель М., Морозов А. В., Сапожников В. В., Сапожников Вл. В. Контроль комбинационных схем методом логического дополнения // Автоматика и телемеханика. 2005. № 8. С. 161—172.

Сведения об авторе

Дмитрий Викторович Ефанов

— д-р техн. наук, профессор; Российский университет транспорта, кафедра автоматизации, телемеханики и связи на железнодорожном транспорте; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Высшая школа транспорта Института машиностроения, материалов и транспорта; профессор;
E-mail: TrES-4b@yandex.ru

Поступила в редакцию 19.11.2022; одобрена после рецензирования 08.12.2022; принята к публикации 20.03.2023.

REFERENCES

1. Sogomonyan E.S., Slabakov E.V. *Samoproveryaemye ustroystva i otkazoustoychivye sistemy* (The Self-Checked Devices and Failure-Safe Systems), Moscow, 1989, 208 p. (in Russ.)
2. Mikoni S.V. *Obshchiye diagnosticheskiye bazy znaniy vychislitel'nykh sistem* (General Diagnostic Knowledge Bases of Computing Systems) St. Petersburg, 1992, 234 p. (in Russ.)
3. Pradhan D.K. *Fault-Tolerant Computer System Design*, NY, Prentice Hall, 1996, 560 p.
4. Lala P.K. *Self-Checking and Fault-Tolerant Digital Design*, San Francisco, Morgan Kaufmann Publishers, 2001, 216 p.
5. Fujiwara E. *Code Design for Dependable Systems: Theory and Practical Applications*, John Wiley & Sons, 2006, 720 p.
6. Drozd A.V., Kharchenko V.S., Antoshchuk S.G., Drozd Yu.V., Drozd M.A., Sulima Yu.Yu. *Rabocheye diagnostirovaniye bezopasnykh informatsionno-upravlyayushchikh sistem* (Working Diagnostics of Safe Information and Control Systems), Khar'kov, 2012, 614 p. (in Russ.)
7. Nikolos D. Chapter 7 in *On-Line Testing for VLSI*, 1998, pp. 69—79, DOI 10.1007/978-1-4757-60-69-9_7.
8. Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.I., Efanov D.V., Dmitriev V.V. *Automation and Remote Control*, 2017, no. 2(78), pp. 300—312, DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117917020096>.
9. Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.I., Efanov D.V. *Kody s summirovaniyem dlya sistem tekhnicheskogo diagnostirovaniya. T. 1. Klassicheskiye kody Bergera i ikh modifikatsii* (Summed Codes for Technical Diagnostic Systems. Vol. 1. Classical Berger Codes and Their Modifications), Moscow, 2020, 383 p. (in Russ.)
10. Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.I., Efanov D.V. *Kody s summirovaniyem dlya sistem tekhnicheskogo diagnostirovaniya. T. 2. Vzveshennyye kody s summirovaniyem* (Summed Codes for Technical Diagnostic Systems. Vol. 2. Weighted Codes with Summation), Moscow, 2021, 455 p. (in Russ.)
11. Berezyuk N.T., Andrushchenko A.G., Moshchitskiy S.S., Glushkov V.I., Benesha M.M., Gavrilov V.A. *Kodirovaniye informatsii (dvoichnyye kody)* (Information Coding (Binary Codes)), Khar'kov, 1978, 252 p. (in Russ.)
12. Baghdadi A.A.A., Hahanov V.I., Litvinova E.I. *Management Information System and Devices*, 2014, no. 166, pp. 59—74. (in Russ.)
13. Patent US 747533, *Self-Checking Error Checker for Two-Rail Coded Data*, W.C. Carter, K.A. Duke, P.R. Schneider, Priority July 25, 1968, Published Jan. 26, 1971.
14. Sogomonyan E.S., Gössel M. *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*, 1993, no. 4(4), pp. 267—281, DOI: 10.1007/BF00971975.
15. Busaba F.Y., Lala P.K. *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*, 1994, no. 1, pp. 19—28, DOI: 10.1007/BF00971960.
16. Matrosova A.Yu., Ostanin S.A. *Proceedings of the IEEE European Test Workshop (ETW'98)*, May 27—29, 1998, Sitges, Barcelona, Spain.
17. Berger J.M. *Information and Control*, 1961, no. 1(4), pp. 68—73, DOI: 10.1016/S0019-9958(61)80037-5.
18. Morosov A., Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.I., Goessel M. *VLSI Design*, 1998, no. 5(4), pp. 333—345, DOI: 10.1155/1998/20389.
19. Sapozhnikov V.V., Morosov A., Sapozhnikov V.I., Goessel M. *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*, 1998, no. 1-2(12), pp. 41—53, DOI: 10.1023/A:1008257118423.

20. Göessel M., Ocheretny V., Sogomonyan E., Marienfeld D. *New Methods of Concurrent Checking*: Edition 1, Dordrecht, Springer Science+Business Media B.V., 2008, 184 p.
21. Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov VI.V., Efanov D.V. *Journal of Instrument Engineering*, 2015, no. 5(58), pp. 333–343, DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-5-333-343. (in Russ.)
22. Efanov D.V., Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov VI.V. *Automation and Remote Control*, 2017, no. 5(78), pp. 891–901, DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117917050113>.
23. Efanov D.V., Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov VI.V. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2020, no. 4(54), pp. 279–290, DOI: 10.3103/S0146411620040045.
24. Efanov D.V., Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov VI.V. *Automation and Remote Control*, 2018, no. 9(79), pp. 1609–1620, DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117918090060>.
25. Aksyonova G.P. *Automation and Remote Control*, 1973, no. 2(34), pp. 267–273.
26. Hamming R.W. *Bell System Technical Journal*, 1950, no. 2(29), pp. 147–160, MR0035935.
27. Sapozhnikov V., Sapozhnikov VI., Efanov D., Dmitriev V. *Proceedings of 14th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2016)*, Yerevan, Armenia, October 14–17, 2016, pp. 134–141, DOI: 10.1109/EWDTS.2016.7807686.
28. Sapozhnikov V., Efanov D., Sapozhnikov VI., Dmitriev V. *Proceedings of 13th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2015)*, Batumi, Georgia, September 26–29, 2015, pp. 154–159, DOI: 10.1109/EWDTS.2015.7493123.
29. Freiman C.V. *Information and Control*, 1962, no. 1(5), pp. 64–71, DOI: 10.1016/S0019-9958(62)90223-1.
30. Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov VI.V., Efanov D.V. *Electronic modeling*, 2017, no. 3(39), pp. 37–60. (in Russ.)
31. Efanov D.V., Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov VI.V. *Trudy SPIIRAN (SPIIRAS Proceedings)*, 2017, no. 5(29), pp. 39–60, DOI: 10.15514/ISPRAS-2017-29(5)-3. (in Russ.)
32. Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov VI.V., Efanov D.V. *Electronic modeling*, 2020, no. 2(42), pp. 3–23, DOI: 10.15407/emodel.42.02.003. (in Russ.)
33. Zakrevskiy A.D., Pottosin Yu.V., Cheremisina L.D. *Logicheskiye osnovy proyektirovaniya diskretnykh ustroystv* (Logical Basis for Designing Discrete Devices), Moscow, 2007, 592 p. (in Russ.)
34. Nicolaidis M., Zorian Y. *Journal of Electronic Testing: Theory and Application*, 1998, no. 1–2(12), pp. 7–20, DOI: 10.1023/A:1008244815697.
35. Mitra S., McCluskey E.J. *Proceedings of International Test Conference*, 2000, USA, Atlantic City, NJ, October 03–05, 2000, pp. 985–994, DOI: 10.1109/TEST.2000.894311.
36. Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov VI.V. *Samoproveryaemye diskretnye ustroystva* (The Self-Checked Discrete Devices), St. Petersburg, 1992, 224 p. (in Russ.)
37. Piestrak S.J. *Design of Self-Testing Checkers for Unidirectional Error Detecting Codes*, Wrocław, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 1995, 111 p.
38. Gessel M., Morozov A.V., Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov VI.V. *Automation and Remote Control*, 2003, no. 1(64), pp. 153–161, DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1021884727370>.
39. Goessel M., Morozov A.V., Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov VI.V. *Automation and Remote Control*, 2005, no. 8, pp. 1336–1346.

Data on author

Dmitry V. Efanov

— Dr. Sci., Professor; Russian University of Transport, Department of Automation, Remote Control, and Communications on Railway Transport; Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Higher School of Transport, Institute of Mechanical Engineering, Materials, and Transport; Professor; E-mail: TrES-4b@yandex.ru

Received 19.11.2022; approved after reviewing 08.12.2022; accepted for publication 20.03.2023.

**СТАЦИОНАРНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ $GI/G/1/1$
В ТЕРМИНАХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕГЕНЕРИРУЮЩЕГО ПРОЦЕССА****А. И. ПЕЩАНСКИЙ***Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия**peschansky_sntu@mail.ru*

Аннотация. Полумарковский процесс, описывающий функционирование системы обслуживания $GI/G/1/1$, рассмотрен как регенерирующий. Точками регенерации являются моменты попадания заявок в свободную систему. Установлены формулы для вычисления следующих характеристик системы за цикл регенерации: средних чисел поступающих, обслуженных и потерянных заявок; среднего времени пребывания системы в свободном состоянии; средних суммарных времен пребывания в системе одной и двух заявок. Финальные вероятности физических состояний системы, средние стационарные времена пребывания в состояниях, в очереди и в системе выражены в терминах характеристик регенерирующего процесса.

Ключевые слова: однолинейная система обслуживания с одним местом для ожидания, регенерирующий процесс, число поступающих, обслуженных и потерянных заявок за цикл регенерации, суммарные времена пребывания в состояниях, стационарные характеристики системы

Ссылка для цитирования: Пещанский А. И. Стационарные показатели системы обслуживания $GI/G/1/1$ в терминах характеристик регенерирующего процесса // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 5. С. 373—388. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-373-388.

**STATIONARY CHARACTERISTICS OF $GI/G/1/1$ QUEUING SYSTEM
IN TERMS OF THE RENEWAL PROCESS****A. I. Peschansky***Sevastopol State University, Sevastopol, Russia**peschansky_sntu@mail.ru*

Abstract. The semi-Markov process describing queuing system operation is analyzed as a renewal. Its regeneration points are the moments of requests arrivals to the free system. Formulas are established for calculating the following characteristics of the system for a regeneration cycle: average numbers of incoming, serviced and lost requests; average residence time of the system in the free state; average total sojourn times in the system for one and two claims. The final probabilities of the system physical states, average stationary sojourn times in the states, in the queue and in the system are expressed in terms of the renewal process characteristics.

Keywords: single-server queuing system with one queue place, renewal process, the number of arrivals, of complete and lost requests per renewal cycle, total sojourn times in states, stationary characteristics of the system

For citation: Peschansky A. I. Stationary characteristics of $GI/G/1/1$ queuing system in terms of the renewal process. *Journal of Instrument Engineering*. 2023. Vol. 66, N 5. P. 373—388 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-373-388.

Введение. Исследованиям систем массового обслуживания (СМО) посвящена обширная библиография. Обзор результатов, полученных в этой области, содержится, например, в [1—6]. Характеристики систем обслуживания, исходные параметры которых имеют экспоненциальные распределения, определяются в явном виде, как правило, с помощью аппарата марковских процессов. Завершенные результаты получены и для ряда систем, распределения параметров которых имеют конкретный вид (отличный от экспоненциального) либо только некоторые из параметров имеют распределения общего вида (например, [1—3, 7—11]). Для систем с общими входными потоками и произвольным распределением времени обслуживания

поиск явного выражения для основных характеристик вызывает определенные сложности. В этом случае стационарные характеристики систем находятся приближенно либо устанавливаются их асимптотические оценки [12—15]. Еще один подход — использование аппарата полумарковских процессов с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний [16—20]. Так, в [20] стационарные характеристики системы $GI/G/1/1$ выражаются в терминах функции распределения времени обслуживания, функции восстановления и прямого остаточного времени процесса восстановления, который порождается входящим потоком заявок. Описание систем обслуживания в терминах регенерирующих процессов встречается в научной литературе значительно реже. Поскольку полумарковский процесс, протекающий в системе $GI/G/1/1$, является также и регенерирующим, то представляется интересным стационарные показатели этой системы выразить через характеристики регенерирующего процесса. Это позволит углубиться в понимание динамики систем обслуживания при различных предположениях о входном потоке и процессе обслуживания.

Постановка задачи. Рассмотрим однолинейную систему обслуживания с одним местом для ожидания $GI/G/1/1$ в классификации Кендалла [21]. Время между моментами поступлений заявок во входящем в систему рекуррентном потоке — случайная величина (СВ) β с функцией распределения (ФР) $G(x) = P\{\beta \leq x\}$. Время обслуживания заявки — СВ α с ФР $F(x) = P\{\alpha \leq x\}$. Предполагается, что СВ α и β независимы, удовлетворяют условию $0 < P\{\beta < \alpha\} < 1$, имеют соответственно плотности распределения $f(x), g(x)$, конечные математические ожидания $M\alpha, M\beta$ и дисперсии. Поступающая в свободную систему заявка начинает немедленно обслуживаться. Если прибор занят обслуживанием, а место в очереди свободно, то заявка становится в очередь. В случае занятого прибора и отсутствия места в очереди заявка теряется.

Представленная система может находиться в следующих физических состояниях: 0 — прибор свободен, в очереди заявки нет, 1 — прибор занят обслуживанием, в очереди заявки нет; 2 — прибор обслуживает заявку, место в очереди занято. В [19, 20] функционирование системы описано с помощью полумарковского процесса $\xi(t)$ с дискретно-непрерывным множеством состояний. Расширенное фазовое пространство состояний системы сформировано в результате добавления к физическим состояниям непрерывных компонентов, которыми служат остаточные времена действия случайных факторов, изменяющих физические состояния [16—19]. С помощью предельных теорем теории полумарковских процессов с измеримым фазовым пространством состояний найдены финальные вероятности и средние стационарные времена пребывания системы в физических состояниях [20]. Полумарковский процесс $\xi(t)$ является также и регенерирующим. Циклами (периодами) регенерации являются промежутки времени между моментами поступления заявок в свободную систему.

В настоящей статье рассматривается полумарковский процесс $\xi(t)$ как регенерирующий и определяются его характеристики: средняя длительность цикла регенерации, средние суммарные времена пребывания системы в физических состояниях, средние числа поступающих и обслуженных заявок за цикл регенерации; известные стационарные показатели системы предлагается [20] выразить в терминах указанных характеристик.

Среднее число обслуженных заявок за цикл регенерации. Пусть $N_{\text{обс}}$ — число обслуженных заявок за цикл регенерации, т.е. за время между соседними моментами поступления заявок в свободную систему. Установим закон распределения этой случайной величины. Начнем с вероятности обслуживания только одной заявки за цикл:

$$P(N_{\text{обс}} = 1) = P\{\beta > \alpha\} = \int_0^{\infty} g(y)F(y)dy.$$

Графическая иллюстрация этого события представлена на рис. 1, где 1 — обслуживающий прибор, 2 — поток заявок.

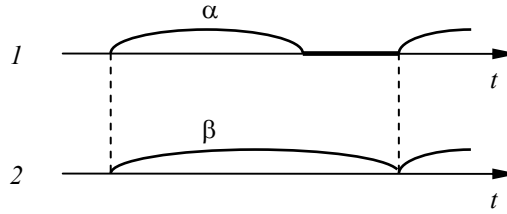


Рис. 1

При определении вероятностей остальных событий понадобится вычислить плотность распределения $v_g(t, x)$ прямого остаточного времени β_t для процесса восстановления, порожденного СВ β : $\beta_t = \tau_{v(t)+1} - t$ (фиксирует время после момента t до момента поступления следующей заявки в систему) [17, 22]:

$$v_g(t, x) = g(t + x) + \int_0^t g(t + x - s)h_g(s)ds,$$

где $h_g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g^{*(n)}(x)$ — плотность функции восстановления $H_g(x)$ входящего потока заявок.

Определим вероятность обслуживания двух заявок за цикл:

$$P(N_{\text{обс}} = 2) = P\{\alpha_1 - \beta \in dt, \beta_t > \alpha_2\} = \int_0^{\infty} F(x)dx \int_0^{\infty} v_g(t, x)dt \int_0^{\infty} f(t + y)g(y)dy.$$

Графическая иллюстрация этого события представлена на рис. 2.

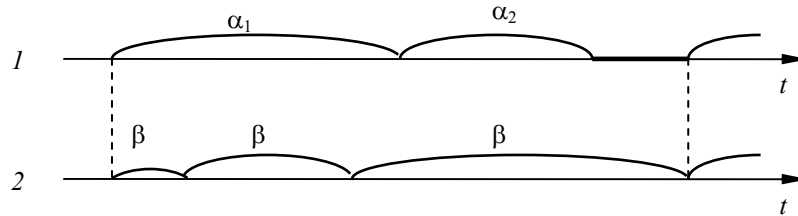


Рис. 2

Обозначим $\gamma(x, y) = \int_0^{\infty} f(t + y)v_g(t, x)dt$. Используя понятие табу-вероятности [23], отметим вероятностный смысл функции $\gamma(x, y)$: это плотность перехода системы из состояния „начинает обслуживаться заявка (до поступления следующей заявки в систему остается время y)“ в ближайшее аналогичное состояние (x — оставшееся время до поступления следующей заявки) при условии, что между этими событиями система не попадает в свободное состояние.

Учитывая, что

$$\int_0^{\infty} \gamma(x, y)dx = \bar{F}(y), \quad (1)$$

с помощью функции $\gamma(x, y)$ и ее итераций запишем закон распределения СВ $N_{\text{обс}}$:

$$P(N_{\text{обс}} = 1) = 1 - \int_0^{\infty} g(y)\bar{F}(y)dy = 1 - \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma(x, y)g(y)dy;$$

$$\begin{aligned}
P(N_{\text{обс}} = 2) &= \int_0^{\infty} F(x) dx \int_0^{\infty} \gamma(x, y) g(y) dy = \int_0^{\infty} g(y) \bar{F}(y) dy - \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx \int_0^{\infty} \gamma(x, y) g(y) dy = \\
&= \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma^{(1)}(x, y) g(y) dy - \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma^{(2)}(x, y) g(y) dy ; \\
P(N_{\text{обс}} = n) &= \int_0^{\infty} F(x) dx \int_0^{\infty} \gamma^{(n-1)}(x, y) g(y) dy = \\
&= \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma^{(n-1)}(x, y) g(y) dy - \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma^{(n)}(x, y) g(y) dy, \quad n \geq 3,
\end{aligned}$$

где

$$\gamma^{(1)}(x, y) = \gamma(x, y), \quad \gamma^{(2)}(x, y) = \int_0^{\infty} \gamma(x, s) \gamma^{(1)}(s, y) ds, \quad \gamma^{(n)}(x, y) = \int_0^{\infty} \gamma(x, s) \gamma^{(n-1)}(s, y) ds.$$

Найдем математическое ожидание СВ $N_{\text{обс}}$:

$$\begin{aligned}
M(N_{\text{обс}}) &\equiv \bar{N}_{\text{обс}} = \sum_{n=1}^{\infty} n P(N_{\text{обс}} = n) = 1 - \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma(x, y) g(y) dy + \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} n \left[\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma^{(n-1)}(x, y) g(y) dy - \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma^{(n)}(x, y) g(y) dy \right] = \\
&= 1 - \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma(x, y) g(y) dy + \sum_{m=1}^{\infty} (m+1) \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma^{(m)}(x, y) g(y) dy - \sum_{n=2}^{\infty} n \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma^{(n)}(x, y) g(y) dy = \\
&= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma^{(m)}(x, y) g(y) dy = 1 + \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} h_{\gamma}(x, y) g(y) dy, \quad h_{\gamma}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{(n)}(x, y).
\end{aligned}$$

Таким образом, среднее число обслуженных заявок за цикл регенерации

$$\bar{N}_{\text{обс}} = \int_0^{\infty} (I + H_{\gamma}) g(x) dx, \quad (2)$$

где $H_{\gamma} \varphi(x) = \int_0^{\infty} h_{\gamma}(x, y) \varphi(y) dy$, I — единичный оператор.

В [20] доказано, что при условии $P\{\beta < \alpha_1 + \alpha_2\} = \delta < 1$ действие интегрального оператора H_{γ} ограничено в пространстве $L^{1,1}(R_+)$ функций, суммируемых с весом на правой полуоси.

Представим выражение (2) в ином виде. Для этого проинтегрируем по переменной x в пределах от 0 до ∞ тождество

$$\gamma(x, y) + \int_0^{\infty} \gamma(x, s) h_{\gamma}(s, y) ds = h_{\gamma}(x, y) \quad (3)$$

и учтем выражение (1), тогда

$$\int_0^{\infty} h_{\gamma}(x, y) F(x) dx = \bar{F}(y). \quad (4)$$

С помощью тождества (4) формула (2) для вычисления среднего числа обслуженных заявок преобразуется к виду

$$\bar{N}_{\text{обс}} = \int_0^{\infty} \bar{F}(x)(I + H_{\gamma})g(x)dx + \int_0^{\infty} F(x)(I + H_{\gamma})g(x)dx = 1 + \int_0^{\infty} \bar{A}_f(I + H_{\gamma})g(x)dx, \quad (5)$$

где

$$\bar{A}_f\phi(x) = \int_0^{\infty} f(x+y)\phi(y)dy.$$

Среднее число заявок, поступающих в систему за цикл регенерации. Обозначим через N число заявок, поступающих в систему за цикл регенерации. Введем в рассмотрение последовательность СВ $\{\zeta_n, n \geq 1\}$, которые определяются следующим образом: ζ_1 — оставшееся время обслуживания первой заявки в цикле регенерации в момент размещения в очереди следующей заявки (при условии, что она поступила во время обслуживания). Плотность распределения вероятностей СВ ζ_1 :

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \left[\int_0^{\infty} g(y)f(x+y)dy \right] \left[\int_0^{\infty} g(y)\bar{F}(y)dy \right]^{-1} \equiv \\ &\equiv \left[\int_0^{\infty} g(y)f(x+y)dy \right] \left[\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma(x,y)g(y)dy \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Заметим, что ζ_1 в [18] обозначается как $[\alpha - \beta]^+$. Графические иллюстрации реализации СВ ζ_1 и ζ_2 представлены на рис. 3.

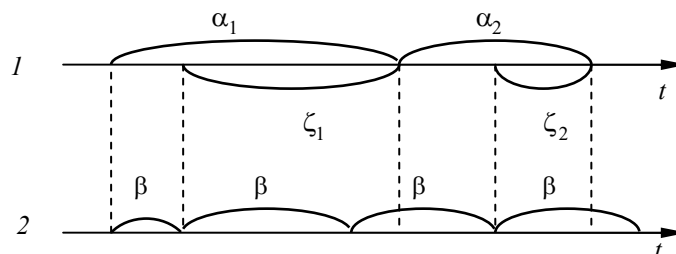


Рис. 3

Аналогично, ζ_n — время, оставшееся до окончания обслуживания n -й заявки в цикле регенерации, в момент постановки в очередь заявки, которая поступила во время обслуживания n -й заявки. Плотность распределения вероятностей ζ_n :

$$\psi_n(x) = \left[\int_0^{\infty} f(x+t)dt \int_0^{\infty} \gamma^{(n-1)}(t,y)g(y)dy \right] \left[\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma^{(n)}(x,y)g(y)dy \right]^{-1}, \quad n \geq 2. \quad (6)$$

Математическое ожидание числа N заявок, поступающих в систему за период регенерации, найдем по формуле полного математического ожидания. Учтем, что численное значение интеграла $\int_0^{\infty} H_g(x)\psi(x)dx$ равно среднему числу событий (первое событие не учитывается) в рекуррентном потоке, порожденном СВ β , за случайное время, которое является реализацией случайной величины с плотностью $\psi(x)$.

Имеем

$$\begin{aligned}
 M(N) \equiv \bar{N} &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) M(N / N_{\text{обс}} = n) = P(N_{\text{обс}} = 1) + \\
 &+ \sum_{n=2}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) \left[n + \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^{\infty} H_g(x) \psi_m(x) dx \right] = \sum_{n=1}^{\infty} n P(N_{\text{обс}} = n) + \\
 &+ \sum_{n=2}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^{\infty} H_g(x) \psi_m(x) dx = \bar{N}_{\text{обс}} + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} H_g(x) \psi_m(x) dx \sum_{n=m+1}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) = \\
 &= \bar{N}_{\text{обс}} + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} H_g(x) \psi_m(x) dx \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma^{(m)}(x, y) g(y) dy.
 \end{aligned}$$

В последнем преобразовании использовано

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) = \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma^{(m)}(x, y) g(y) dy.$$

Выражение (6) для плотности распределения $\psi_m(x)$ приводит к равенству

$$\bar{N} = \bar{N}_{\text{обс}} + \int_0^{\infty} H_g(x) dx \int_0^{\infty} f(x+t) g(t) dt + \int_0^{\infty} H_g(x) dx \int_0^{\infty} f(x+t) dt \int_0^{\infty} h_{\gamma}(t, y) g(y) dy$$

или

$$\bar{N} = \bar{N}_{\text{обс}} + \int_0^{\infty} H_g \bar{A}_f (I + H_{\gamma}) g(x) dx, \quad (7)$$

где

$$H_g \varphi(x) = \int_x^{\infty} h_g(y-x) \varphi(y) dy.$$

Учитывая формулу (5) для среднего числа обслуженных заявок, окончательно получаем

$$\bar{N} = 1 + \int_0^{\infty} (I + H_g) \bar{A}_f (I + H_{\gamma}) g(x) dx. \quad (8)$$

Заметим, что из (7) вытекает формула для нахождения среднего числа $\bar{N}_{\Pi}$ потерянных заявок за цикл регенерации по причине отсутствия места в очереди:

$$\bar{N}_{\Pi} = \bar{N} - \bar{N}_{\text{обс}} = \int_0^{\infty} H_g \bar{A}_f (I + H_{\gamma}) g(x) dx. \quad (9)$$

Среднее суммарное время пребывания в системе двух заявок за цикл регенерации. Обозначим через T_2 суммарное время пребывания в системе двух заявок (одна обслуживается, вторая — в очереди) за цикл регенерации. Очевидно, что T_2 является смесью сумм случайных величин ζ_m , плотности распределения которых определяются формулой (6), т.е.

$$T_2 = \sum_{n=2}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) \sum_{m=1}^{n-1} \zeta_m.$$

На рис. 4 схематически проиллюстрировано суммарное время пребывания в системе двух заявок за цикл регенерации для случая $N_{\text{обс}} = 3$.

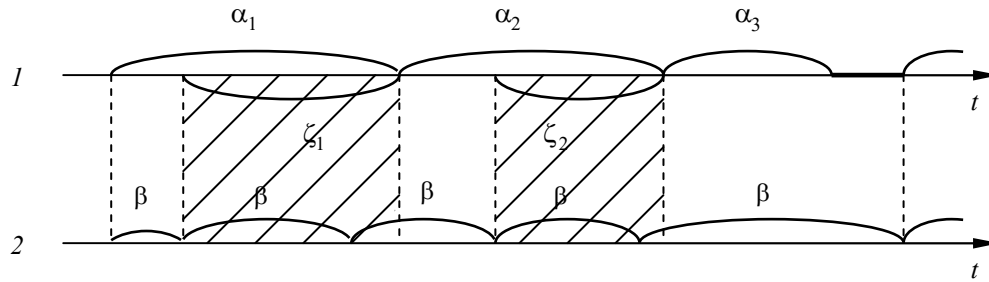


Рис. 4

По формуле полного математического ожидания имеем

$$\begin{aligned} M(T_2) \equiv \bar{T}_2 &= \sum_{n=2}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) \sum_{m=1}^{n-1} M\zeta_m = \sum_{m=1}^{\infty} M\zeta_m \sum_{n=m+1}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} M\zeta_m \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma^{(m)}(x, y) g(y) dy. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\bar{\Psi}_1(x) = \frac{\int_0^{\infty} g(y) \bar{F}(x+y) dy}{\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma(x, y) g(y) dy}, \quad \bar{\Psi}_m(x) = \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}(x+t) dt \int_0^{\infty} \gamma^{(m-1)}(t, y) g(y) dy}{\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma^{(m)}(x, y) g(y) dy}, \quad m \geq 2,$$

где $\bar{\Psi}_m(x) = \int_x^{\infty} \psi_m(t) dt$, $m \geq 1$, найдем математические ожидания $M\zeta_m$:

$$M\zeta_1 = \frac{\int_0^{\infty} g(x) dx \int_x^{\infty} \bar{F}(t) dt}{\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma(x, y) g(y) dy}, \quad M\zeta_m = \frac{\int_0^{\infty} dx \int_x^{\infty} \bar{F}(t) dt \int_0^{\infty} \gamma^{(m-1)}(x, y) g(y) dy}{\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma^{(m)}(x, y) g(y) dy}, \quad m \geq 2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{T}_2 &= \int_0^{\infty} g(x) dx \int_x^{\infty} \bar{F}(t) dt + \sum_{m=2}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \int_x^{\infty} \bar{F}(t) dt \int_0^{\infty} \gamma^{(m-1)}(x, y) g(y) dy = \\ &= \int_0^{\infty} g(x) dx \int_x^{\infty} \bar{F}(t) dt + \int_0^{\infty} dx \int_x^{\infty} \bar{F}(t) dt \int_0^{\infty} h_{\gamma}(x, y) g(y) dy. \end{aligned}$$

Окончательно получаем выражение для определения среднего суммарного времени пребывания двух заявок в системе за цикл регенерации

$$\bar{T}_2 = \int_0^{\infty} (I + H_{\gamma}) g(x) dx \int_x^{\infty} \bar{F}(t) dt. \quad (10)$$

Среднее суммарное время пребывания одной заявки в системе за цикл регенерации. Пусть T_1 — суммарное время пребывания одной заявки в системе (заявка обслуживается, место в очереди свободно) за цикл регенерации. Рассмотрим последовательность СВ

$\{\eta_m, m \geq 1\}$. СВ η_m равна величине первого перескока суммы СВ $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$ последовательностью СВ β_n из рекуррентного входящего потока заявок при условии, что при обслуживании m -й заявки в цикле регенерации место в очереди занято. Графические иллюстрации реализации случайных величин η_1 и η_2 представлены на рис. 5.

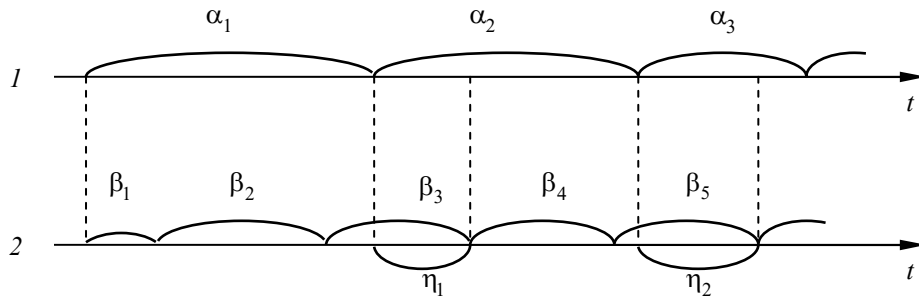


Рис. 5

Плотность распределения вероятностей $\varphi_m(x)$ СВ η_m определяется формулой

$$\varphi_m(x) = \left[\int_0^\infty \gamma^{(m)}(x, y) g(y) dy \right] \left[\int_0^\infty dx \int_0^\infty \gamma^{(m)}(x, y) g(y) dy \right]^{-1}.$$

Если $N_{\text{обс}} = 1$, то $T_1 = \alpha_1, \alpha_1 < \beta_1$. В случае $N_{\text{обс}} = 2$ имеем $T_1 = \beta_1 + \alpha_2, \beta_1 < \alpha_1, \alpha_2 < \eta_1$. Если $N_{\text{обс}} = n, n \geq 3$, то $T_1 = \beta_1 + \sum_{m=1}^{n-2} \eta_m + \alpha_n, \beta_1 < \alpha_1, \alpha_n < \eta_{n-1}$. Суммарное время пребывания одной заявки в системе за цикл регенерации для случая $N_{\text{обс}} = 3$ проиллюстрировано на рис. 6.

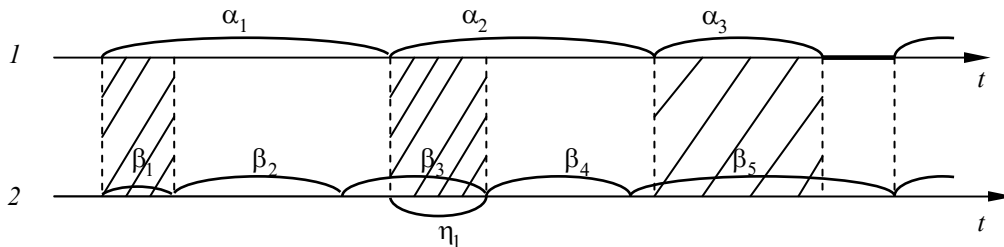


Рис. 6

Среднее значение T_1 найдем по формуле полного математического ожидания:

$$\begin{aligned} M(T_1) \equiv \bar{T}_1 &= P(N_{\text{обс}} = 1)M(\alpha / \alpha < \beta) + P(N_{\text{обс}} = 2)[M(\beta / \beta < \alpha) + M(\alpha / \alpha < \eta_1)] + \\ &+ \sum_{n=3}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) \left[M(\beta / \beta < \alpha) + \sum_{m=1}^{n-2} M(\eta_m / \eta_m < \alpha) + M(\alpha / \alpha < \eta_{n-1}) \right] = \\ &= P(N_{\text{обс}} = 1)M(\alpha / \alpha < \beta) + M(\beta / \beta < \alpha) \sum_{n=2}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n)M(\alpha / \alpha < \eta_{n-1}) + \sum_{n=3}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) \sum_{m=1}^{n-2} M(\eta_m / \eta_m < \alpha). \end{aligned}$$

Далее учтем соотношения

$$P(N_{\text{обс}} = 1) = \int_0^\infty g(y)F(y)dy, \quad M(\alpha / \alpha < \beta) = \left[\int_0^\infty xf'(x)\bar{G}(x)dx \right] \left[\int_0^\infty g(x)F(x)dx \right]^{-1};$$

$$\begin{aligned}
M(\beta / \beta < \alpha) &= \frac{\int_0^{\infty} xg(x)\bar{F}(x)dx}{1 - \int_0^{\infty} g(x)F(x)dx}, \sum_{n=2}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) = 1 - P(N_{\text{обс}} = 1) = 1 - \int_0^{\infty} g(x)F(x)dx; \\
P(N_{\text{обс}} = n)M(\alpha / \alpha < \eta_{n-1}) &= P(N_{\text{обс}} = n) \frac{\int_0^{\infty} xf(x)dx \int_x^{\infty} \varphi_{n-1}(t)dt}{\int_0^{\infty} f(x)dx \int_x^{\infty} \varphi_{n-1}(t)dt} = \\
&= P(N_{\text{обс}} = n) \frac{\int_0^{\infty} xf(x)dx \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} \gamma^{(n-1)}(t, y)g(y)dy}{\int_0^{\infty} F(t)dt \int_0^{\infty} \gamma^{(n-1)}(t, y)g(y)dy} = \int_0^{\infty} xf(x)dx \int_x^{\infty} dt \int_0^{\infty} \gamma^{(n-1)}(t, y)g(y)dy; \\
\sum_{n=3}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) \sum_{m=1}^{n-2} M(\eta_m / \eta_m < \alpha) &= \sum_{m=1}^{\infty} M(\eta_m / \eta_m < \alpha) \sum_{n=m+2}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) = \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} M(\eta_m / \eta_m < \alpha) \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} \gamma^{(m+1)}(t, y)g(y)dy = \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_0^{\infty} x\bar{F}(x)\varphi_m(x)dx}{\int_0^{\infty} \bar{F}(x)\varphi_m(x)dx} \int_0^{\infty} \bar{F}(t)dt \int_0^{\infty} \gamma^{(m)}(t, y)g(y)dy = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x\bar{F}(x)dx \int_0^{\infty} \gamma^{(m)}(x, y)g(y)dy.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\bar{T}_1 &= \int_0^{\infty} xf(x)\bar{G}(x)dx + \int_0^{\infty} xg(x)\bar{F}(x)dx + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{\infty} xf(x)dx \int_x^{\infty} dt \int_0^{\infty} \gamma^{(n-1)}(t, y)g(y)dy + \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x\bar{F}(x)dx \int_0^{\infty} \gamma^{(m)}(x, y)g(y)dy = \int_0^{\infty} \bar{F}(x)\bar{G}(x)dx + \int_0^{\infty} xf(x)dx \int_x^{\infty} dt \int_0^{\infty} h_{\gamma}(t, y)g(y)dy + \\
&+ \int_0^{\infty} x\bar{F}(x)dx \int_0^{\infty} h_{\gamma}(x, y)g(y)dy = \int_0^{\infty} \bar{F}(x)\bar{G}(x)dx + \int_0^{\infty} \bar{F}(x)dx \int_x^{\infty} dt \int_0^{\infty} h_{\gamma}(t, y)g(y)dy = \\
&= \int_0^{\infty} g(x)dx \int_0^x \bar{F}(t)dt + \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} h_{\gamma}(x, y)g(y)dy \int_0^x \bar{F}(t)dt = \int_0^{\infty} (I + H_{\gamma})g(x)dx \int_0^x \bar{F}(t)dt.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\bar{T}_1 = \int_0^{\infty} (I + H_{\gamma})g(x)dx \int_0^x \bar{F}(t)dt. \quad (11)$$

Теперь можем определить среднее время занятости прибора за цикл регенерации

$$\bar{T}_1 + \bar{T}_2 = M\alpha \int_0^{\infty} (I + H_{\gamma})g(x)dx = M\alpha \bar{N}_{\text{обс}}. \quad (12)$$

Среднее время пребывания системы в свободном состоянии за цикл регенерации. Пусть T_0 — время пребывания системы в свободном состоянии за цикл регенерации. Геометрическая иллюстрация этого времени представлена на рис. 7. Плотность распределения вероятностей этой СВ

$$l(x) = \int_0^{\infty} f(s)g(s+x)ds + \int_0^{\infty} g(y)dy \int_0^{\infty} h_{\gamma}(s+x, y)f(s)ds,$$

или в операторной форме $l(x) = A_f(I + H_{\gamma})g(x)$, где $A_f\varphi(x) = \int_x^{\infty} f(y-x)\varphi(y)dy$.

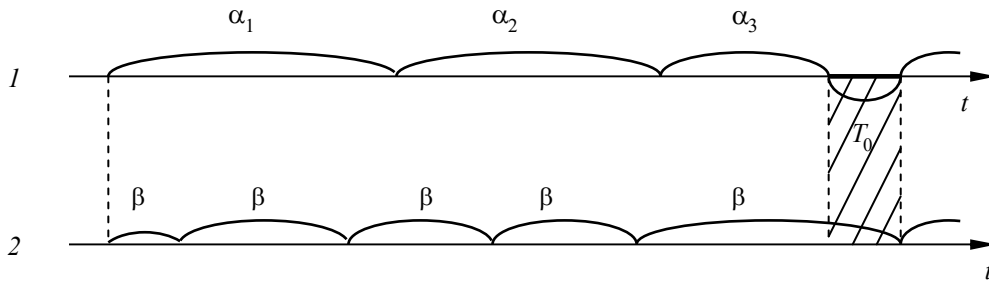


Рис. 7

Найдем выражение для функции $\bar{L}(x) = 1 - L(x)$, где $L(x)$ — функция распределения СВ T_0 :

$$\begin{aligned} \bar{L}(x) &= \int_x^{\infty} A_f(I + H_{\gamma})g(t)dt = \int_0^{\infty} f(s)\bar{G}(s+x)ds + \int_0^{\infty} g(y)dy \int_0^{\infty} f(s)ds \int_{s+x}^{\infty} h_{\gamma}(z, y)dz = \\ &= \int_0^{\infty} f(s)\bar{G}(s+x)ds + \int_0^{\infty} g(y)dy \int_x^{\infty} h_{\gamma}(z, y)F(z-x)dz = \int_0^{\infty} f(s)\bar{G}(s+x)ds + \\ &\quad + \int_0^{\infty} g(y)dy \int_0^{\infty} h_{\gamma}(x+t, y)F(t)dt. \end{aligned}$$

Теперь вычислим математическое ожидание СВ T_0 :

$$\begin{aligned} M(T_0) \equiv \bar{T}_0 &= \int_0^{\infty} g(x)dx \int_0^x F(t)dt + \int_0^{\infty} F(t)dt \int_t^{\infty} ds \int_0^{\infty} h_{\gamma}(s, y)g(y)dy = \\ &= \int_0^{\infty} g(x)dx \int_0^x F(t)dt + \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} h_{\gamma}(x, y)g(y)dy \int_0^x F(t)dt. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\bar{T}_0 = \int_0^{\infty} (I + H_{\gamma})g(x)dx \int_0^x F(t)dt. \quad (13)$$

Среднее время пребывания системы в свободном состоянии можно выразить через среднее число поступивших и обслуженных заявок за цикл регенерации:

$$\begin{aligned} \bar{T}_0 &= \int_0^{\infty} (I + H_{\gamma})g(x)dx \int_0^x F(t)dt = \int_0^{\infty} (I + H_{\gamma})g(x)xdx - \int_0^{\infty} (I + H_{\gamma})g(x)dx \int_0^x \bar{F}(t)dt = \\ &= M\beta + \int_0^{\infty} (H_{\gamma}g(x))xdx - \bar{T}_1 = M\beta + \int_0^{\infty} g(y)dy \int_0^{\infty} xh_{\gamma}(x, y)dx - \bar{T}_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Далее преобразуем интеграл $\int_0^{\infty} x h_{\gamma}(x, y) dx$. Для этого умножим обе части тождества (3)

на x и почленно проинтегрируем его по этой переменной в пределах от 0 до ∞ . Принимая во внимание, что $M\beta_t = M\beta(1 + H_g(t)) - t$ [22], имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x \gamma(x, y) dx &= M\beta \bar{F}(y) + M\beta \int_0^{\infty} H_g(t) f(t+y) dt - \int_y^{\infty} \bar{F}(t) dt, \\ \int_0^{\infty} x h_{\gamma}(x, y) dx &= M\beta \bar{F}(y) + M\beta \int_0^{\infty} H_g(t) f(t+y) dt - \int_y^{\infty} \bar{F}(t) dt + \\ &+ M\beta \left[\int_0^{\infty} \bar{F}(s) h_{\gamma}(s, y) ds + \int_0^{\infty} h_{\gamma}(s, y) ds \int_0^{\infty} H_g(t) f(t+s) dt \right] - \int_0^{\infty} h_{\gamma}(s, y) ds \int_s^{\infty} \bar{F}(t) dt. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} g(y) dy \int_0^{\infty} x h_{\gamma}(x, y) dx &= M\beta \int_0^{\infty} (I + H_g) \bar{A}_f(I + H_{\gamma}) g(x) dx - \int_0^{\infty} (I + H_{\gamma}) g(x) dx \int_x^{\infty} \bar{F}(t) dt = \\ &= M\beta [\bar{N} - 1] - \bar{T}_2. \end{aligned}$$

Возвращаясь к (14), получаем

$$\bar{T}_0 = M\beta \bar{N} - \bar{T}_1 - \bar{T}_2 = M\beta \bar{N} - M\alpha \bar{N}_{\text{обс}}. \quad (15)$$

Средняя длительность цикла регенерации. Определив средние суммарные времена пребывания системы в возможных физических состояниях системы за цикл регенерации, найдем среднюю длительность цикла $\bar{T}$:

$$\begin{aligned} \bar{T} = \bar{T}_2 + \bar{T}_1 + \bar{T}_0 &= \int_0^{\infty} (I + H_{\gamma}) g(x) dx \int_x^{\infty} \bar{F}(t) dt + \int_0^{\infty} (I + H_{\gamma}) g(x) dx \int_0^x \bar{F}(t) dt + \\ &+ M\beta \bar{N} - M\alpha \bar{N}_{\text{обс}} = M\alpha \int_0^{\infty} (I + H_{\gamma}) g(x) dx + M\beta \bar{N} - M\alpha \bar{N}_{\text{обс}} = M\beta \bar{N}. \end{aligned}$$

Таким образом, средняя длительность цикла регенерации равна произведению средней длительности интервала между поступлениями заявок в систему на среднее число поступающих заявок за цикл:

$$\bar{T} = M\beta \bar{N}. \quad (16)$$

Финальные вероятности состояний системы. В [20] получены следующие формулы для вычисления финальных вероятностей p_i пребывания системы в физических состояниях $i = 0, 1, 2$ и финальной вероятности $p_1 + p_2$ того, что прибор занят обслуживанием:

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{\int_0^{\infty} (I + H_{\gamma}) g(x) dx \int_0^x \bar{F}(t) dt}{M\alpha \int_0^{\infty} (I + H_{\gamma}) g(x) dx + \int_0^{\infty} (I + H_{\gamma}) g(x) dx \int_0^x \bar{F}(t) dt}; \\ p_1 &= \frac{\int_0^{\infty} (I + H_{\gamma}) g(x) dx \int_0^x \bar{F}(t) dt}{M\alpha \int_0^{\infty} (I + H_{\gamma}) g(x) dx + \int_0^{\infty} (I + H_{\gamma}) g(x) dx \int_0^x \bar{F}(t) dt}; \end{aligned}$$

$$p_2 = \frac{\int_0^\infty (I + H_\gamma)g(x)dx \int_x^\infty \bar{F}(t)dt}{M\alpha \int_0^\infty (I + H_\gamma)g(x)dx + \int_0^\infty (I + H_\gamma)g(x)dx \int_0^x F(t)dt},$$

$$p_1 + p_2 = \frac{M\alpha \int_0^\infty (I + H_\gamma)g(x)dx}{M\alpha \int_0^\infty (I + H_\gamma)g(x)dx + \int_0^\infty (I + H_\gamma)g(x)dx \int_0^x F(t)dt}.$$

В терминах регенерирующего процесса эти утверждения имеют следующую формулировку: финальные вероятности физических состояний системы равны отношению средних суммарных времен пребывания системы в соответствующих физических состояниях за цикл регенерации к средней его продолжительности:

$$p_0 = \frac{\bar{T}_0}{\bar{T}}, \quad p_1 = \frac{\bar{T}_1}{\bar{T}}, \quad p_2 = \frac{\bar{T}_2}{\bar{T}}, \quad p_1 + p_2 = \frac{M\alpha \bar{N}_{\text{обс}}}{\bar{T}}. \quad (17)$$

Средние стационарные времена пребывания системы в подмножествах состояний. Обозначим через $T(E_i)$ средние стационарные времена пребывания системы в физических состояниях $i = 0, 1, 2$. В [20] установлены следующие формулы:

$$T(E_0) = \int_0^\infty (I + H_\gamma)g(x)dx \int_0^x F(t)dt;$$

$$T(E_1) = \left[\int_0^\infty (I + H_\gamma)g(x)dx \int_0^x \bar{F}(t)dt \right] \left[\int_0^\infty (I + H_\gamma)g(x)dx \right]^{-1};$$

$$T(E_2) = \left[\int_0^\infty (I + H_\gamma)g(x)dx \int_x^\infty \bar{F}(t)dt \right] \left[\int_0^\infty H_\gamma g(x)dx \right]^{-1},$$

$$T(E_1 \cup E_2) = M\alpha \int_0^\infty (I + H_\gamma)g(x)dx.$$

Полученные выражения для стационарных времен пребывания системы в состояниях имеют следующую интерпретацию в терминах характеристик регенерирующего процесса:

$$T(E_0) = \bar{T}_0 \equiv M\beta \bar{N} - M\alpha \bar{N}_{\text{обс}}, \quad T(E_1) = \frac{\bar{T}_1}{\bar{N}_{\text{обс}}}, \quad (18)$$

$$T(E_2) = \frac{\bar{T}_2}{\bar{N}_{\text{обс}} - 1}, \quad T(E_1 \cup E_2) = M\alpha \bar{N}_{\text{обс}}.$$

Зная финальные вероятности и средние стационарные времена пребывания системы в состояниях 1 и 2, можно найти в установившемся режиме относительную пропускную способность системы $1 - p_2$, среднее время $\bar{t}_o$ пребывания заявки в очереди и среднее время $\bar{t}_s$ пребывания заявки в системе:

$$1 - p_2 = 1 - \bar{T}_2 \left[\bar{T} \right]^{-1}; \quad \bar{t}_o = p_1 \bar{T}_2 \left[\bar{N}_{\text{обс}} - 1 \right]^{-1}; \quad \bar{t}_s = (p_0 + p_1) M\alpha + p_1 \bar{T}_2 \left[\bar{N}_{\text{обс}} - 1 \right]^{-1}. \quad (19)$$

Частные случаи СМО. Выпишем стационарные характеристики частных случаев СМО $GI/G/1/1$, которые являются следствиями полученных формул.

Система $M/M/1/1$. Интенсивность входящего пуассоновского потока заявок равна b , а время обслуживания заявок имеет показательное распределение с параметром a . Тогда $\gamma(x, y) = be^{-bx-ay}$, $h_\gamma(x, y) = ba^{-1}(a+b)e^{-bx-ay}$. Преобразования интегральных выражений в формулах (2) и (8)—(19) приводят к известным соотношениям:

$$\begin{aligned} p_0 &= (1-\rho)(1-\rho^3)^{-1}, \quad p_1 = \rho p_0, \quad p_2 = \rho^2 p_0; \\ \bar{N}_{\text{обс}} &= 1+\rho, \quad \bar{N}_{\text{п}} = \rho^2, \quad \bar{N} = 1+\rho+\rho^2; \\ \bar{T}_0 &= b^{-1}, \quad \bar{T}_1 = b^{-1}\rho, \quad \bar{T}_2 = b^{-1}\rho^2, \quad \bar{T} = b^{-1}(1+\rho+\rho^2); \\ T(E_0) &= b^{-1}, \quad T(E_1) = (a+b)^{-1}, \quad T(E_2) = a^{-1}, \quad T(E_1 \cup E_2) = a^{-1}(1+\rho); \\ \bar{t}_o &= \frac{\rho^2}{b} \frac{1-\rho}{1-\rho^3}; \quad \bar{t}_s = \frac{\rho+2\rho^2}{b} \frac{1-\rho}{1-\rho^3}, \quad \rho = \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Система $M/G/1/1$. Пусть интенсивность простейшего входящего равна b , т.е. $g(x) = be^{-bx}$, тогда $\gamma(x, y) = be^{-bx}\bar{F}(y)$, $h_\gamma(x, y) = b(1-d)^{-1}\bar{F}(y)e^{-bx}$, где $d = P\{\alpha > \beta\} = b \int_0^\infty \bar{F}(x)e^{-bx}dx < 1$. Преобразования выражений в (2) и (8)—(15) приводят к следующим расчетным формулам:

$$\begin{aligned} \bar{T}_0 &= b^{-1}, \quad \bar{T}_1 = d[b(1-d)]^{-1}, \quad \bar{T}_2 = [bM\alpha - d][b(1-d)]^{-1}, \quad \bar{T} = b^{-1} + (1-d)^{-1}M\alpha; \\ \bar{N} &= 1 + b(1-d)^{-1}M\alpha, \quad \bar{N}_{\text{обс}} = (1-d)^{-1}, \quad \bar{N}_{\text{п}} = (bM\alpha - d)(1-d)^{-1}. \end{aligned}$$

Выражения (17)—(19) для определения стационарных характеристик системы принимают вид

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1-d}{1-d+bM\alpha}, \quad p_1 = \frac{d}{1-d+bM\alpha}, \quad p_2 = \frac{bM\alpha - d}{1-d+bM\alpha}, \quad p_1 + p_2 = \frac{bM\alpha}{1-d+bM\alpha}; \\ T(E_0) &= b^{-1}, \quad T(E_1) = b^{-1}d, \quad T(E_2) = d^{-1}M\alpha - b^{-1}, \quad T(E_1 \cup E_2) = (1-d)^{-1}M\alpha; \\ \bar{t}_o &= [bM\alpha - d][b(1-d+bM\alpha)]^{-1}, \quad \bar{t}_s = [2bM\alpha - d][b(1-d+bM\alpha)]^{-1}. \end{aligned}$$

Система $GI/M/1/1$. Пусть время обслуживания заявок распределено экспоненциально с параметром a , т.е. $f(x) = ae^{-ax}$. Тогда $\gamma(x, y) = P(x) \cdot Q(y)$, где

$$P(x) = e^{ax} \int_x^\infty g(s)e^{-as}ds, \quad Q(y) = \frac{ae^{-ay}}{1-\tilde{g}(a)}.$$

Здесь символом $\tilde{g}(a)$ обозначено преобразование Лапласа плотности $g(x)$: $\tilde{g}(a) = \int_0^\infty g(x)e^{-ax}dx$. Ядро интегрального оператора H_γ определяется как

$$h_\gamma(x, y) = \frac{1}{1-q} P(x)Q(y), \quad q = \int_0^\infty Q(\tau)P(\tau)d\tau = \frac{-a\tilde{g}'(a)}{1-\tilde{g}(a)}.$$

Преобразования выражений в (2) и (8)—(19) приводят к следующим утверждениям:

$$\bar{N} = 1 + \frac{1}{1-q} \frac{\tilde{g}(a)}{1-\tilde{g}(a)}, \quad \bar{N}_{\text{обс}} = 1 + \frac{\tilde{g}(a)}{1-q}, \quad \bar{N}_{\text{п}} = \frac{1}{1-q} \frac{(\tilde{g}(a))^2}{1-\tilde{g}(a)};$$

$$\begin{aligned}\bar{T}_0 &= M\beta \left(1 + \frac{1}{1-q} \frac{\tilde{g}(a)}{1-\tilde{g}(a)} \right) - \frac{1}{a} \left(1 + \frac{\tilde{g}(a)}{1-q} \right), \quad \bar{T}_1 = \frac{1}{a}, \quad \bar{T}_2 = \frac{1}{a} \frac{\tilde{g}(a)}{1-\tilde{g}(a)}, \quad \bar{T} = M\beta + \frac{M\beta}{1-q} \frac{\tilde{g}(a)}{1-\tilde{g}(a)}; \\ p_0 &= 1 - \frac{(1-q+\tilde{g}(a))(1-\tilde{g}(a))}{aM\beta(1-q+q\tilde{g}(a))}, \quad p_1 = \frac{(1-q)(1-\tilde{g}(a))}{aM\beta(1-q+q\tilde{g}(a))}, \quad p_2 = \frac{\tilde{g}(a)(1-\tilde{g}(a))}{aM\beta(1-q+q\tilde{g}(a))}; \\ T(E_0) &= M\beta \frac{1-q+q\tilde{g}(a)}{(1-q)(1-\tilde{g}(a))} - \frac{1-q+\tilde{g}(a)}{a(1-q)}, \quad T(E_2) = \frac{1}{a}, \quad T(E_1) = \frac{1-q}{a(1-q+\tilde{g}(a))}; \\ \bar{t}_o &= \frac{(1-q)(1-\tilde{g}(a))}{a^2 M\beta(1-q+q\tilde{g}(a))}, \quad \bar{t}_s = \frac{1}{a} - \frac{(1-q-\tilde{g}(a))(1-\tilde{g}(a))}{a^2 M\beta(1-q+q\tilde{g}(a))}.\end{aligned}$$

Численный пример. В таблице приведены численные результаты расчета характеристик однолинейной системы обслуживания с одним местом для ожидания для различных законов входных параметров системы при условии, что средние времена между заявками во входящем потоке и средние времена обслуживания одинаковые для всех законов и равны $M\beta = 0,067$ ч, $M\alpha = 0,200$ ч соответственно. Символом E_2 обозначен закон Эрланга второго порядка.

Предельная характеристика	Код системы			
	$E_2 / E_2 / 1/1$	$E_2 / M / 1/1$	$M / E_2 / 1/1$	$M / M / 1/1$
$\bar{N}_{\text{обс}}$	6,724	4,519	6,250	4,000
$\bar{N}_{\text{п}}$	13,924	9,744	13,500	9,000
$\bar{N}$	20,648	14,263	19,750	13,000
$\bar{T}$, ч	1,377	0,951	1,317	0,867
$\bar{T}_1$, ч	0,323	0,200	0,350	0,200
$\bar{T}_2$, ч	1,022	0,704	0,900	0,600
$\bar{T}_0$, ч	0,032	0,047	0,067	0,067
p_0	0,023	0,050	0,051	0,077
p_1	0,235	0,210	0,266	0,231
p_2	0,742	0,740	0,684	0,692
$p_1 + p_2$	0,977	0,950	0,949	0,923
$1 - p_2$	0,258	0,260	0,316	0,308
$T(E_0)$, ч	0,032	0,047	0,067	0,067
$T(E_1)$, ч	0,048	0,044	0,056	0,050
$T(E_2)$, ч	0,178	0,200	0,171	0,200
$\bar{t}_o$, ч	0,042	0,042	0,046	0,046
$\bar{t}_s$, ч	0,093	0,094	0,109	0,108

Заключение. Полумарковский процесс, описывающий функционирование системы обслуживания $GI / G / 1/1$, рассмотрен как регенерирующий, точками регенерации которого являются моменты попадания заявок в свободную систему. Установлены формулы для вычисления среднего числа поступающих, обслуженных и потерянных заявок, а также средние суммарные времена пребывания в системе одной и двух заявок за цикл регенерации. Финальные вероятности физических состояний системы и средние стационарные времена пребывания в этих состояниях, в очереди и в системе выражены в терминах характеристик регенерирующего процесса. Как следствие полученных утверждений, выведены формулы для вычисления стационарных характеристик однолинейной системы обслуживания с одним местом для ожидания в случае частных законов распределения входных параметров системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987. 336 с.
2. Бочаров П. П., Печинкин А. В. Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995. 529 с.
3. Климов Г. П. Стохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1966. 244 с.
4. Коваленко И. Н. Теория массового обслуживания // Итоги науки. Сер. Теор. вероятн. 1963. М., 1965. С. 73—122.
5. Коваленко И. Н. Теория массового обслуживания // Итоги науки. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет. 1970. М., 1971. С. 5—109.
6. Коваленко И. Н. Обзор моих научных работ. Учителя и соратники // Кибернетика и системный анализ. 2010. № 3. С. 3—27.
7. Печинкин А. В. Стационарные вероятности состояний в системе GI/G/1/N с неординарным входящим потоком требований // Вестник РУДН. 1995. № 1. С. 77—86.
8. Печинкин А. В., Чаплыгин В. В. Стационарные характеристики системы массового обслуживания $SM / MSP / n / r$ // Автоматика и телемеханика. 2004. № 9. С. 85—100.
9. Дудин А. Н., Вишневский В. М., Синюгина Ю. В. Анализ очереди $BMAP / G / 1$ с закрытым сервисом и адаптивной продолжительностью отпусков // Телекоммуникационные системы. 2016. Т. 61, № 3. С. 403—415. DOI: 10.1007/s11235-014-9946-8.
10. Бутко Т. К. Процесс марковского восстановления системы $G / M / 1 / \infty$ // Применение аналитических методов в теории вероятностей: Сб. науч. тр. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. С. 17—27.
11. Тарасов В. Н. Исследование систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями // Проблемы передачи информации. 2016. № 1. С. 16—26.
12. Atkinson J. B., Kovalenko I. N. Some light-traffic and heavy-traffic results for the GI/G/n/0 queue using the GM Heuristic // Кибернетика и системный анализ. 2010. № 3. С. 92—100.
13. Chen Y., Whitt W. Set-valued Performance Approximations for the GI/G/K Queue Given Partial Information // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2020. P. 1—23. DOI:10.1017/S0269964820000509.
14. Chen Y., Whitt W. Extremal models for the GI/GI/K waiting-time tail-probability decay rate // Operations Research Letters. 2020. Vol. 48. P. 770—776. DOI: 10.1019/j.orl.2020.09.004.
15. Chen Y., Whitt W. Algorithms for the upper bound mean waiting time in the GI/GI/1 queue // Queueing Systems. 2020. Vol. 94. P. 327—356. DOI: 10.1007/s11134-020-09649-9.
16. Королюк В. С., Турбин А. Ф. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. Киев: Наук. думка, 1982. 236 с.
17. Королюк В. С. Стохастические модели систем. Киев: Наук. думка, 1989. 208 с.
18. Корлат А. Н., Кузнецов В. Н., Новиков М. И., Турбин А. Ф. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. Кишинев: Штиинца, 1991. 276 с.
19. Копп В. Я., Обжерин Ю. Е., Песчанский А. И. Моделирование автоматизированных линий. Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2006. 240 с.
20. Обжерин Ю. Е., Песчанский А. И. Стационарные характеристики однолинейной системы обслуживания с одним местом для ожидания // Кибернетика и системный анализ. 2006. № 5. С. 51—62.
21. Kendall D. Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain // Ann. Math. Statistics. 1953. Vol. 24, N 3. P. 338—354.
22. Beichelt F., Franken P. Zuverlässigkeit und Instanphaltung, Mathematische Methoden. Berlin: VEB Verlag Technik, 1983. 392 p.
23. Чжун Кай-Лай. Однородные цепи Маркова. М.: Мир, 1964. 425 с.

Сведения об авторе

Алексей Иванович Песчанский

— д-р техн. наук, профессор; Севастопольский государственный университет, кафедра высшей математики; E-mail: peschansky_sntu@mail.ru

Поступила в редакцию 09.11.2022; одобрена после рецензирования 26.11.2022; принята к публикации 20.03.2023.

REFERENCES

1. Gnedenko B.V., Kovalenko I.N. *Vvedeniye v teoriyu massovogo obsluzhivaniya* (Introduction to Queuing Theory), Moscow, 1987, 336 p. (in Russ.)
2. Bocharov P.P., Pechinkin A.V. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* (Queuing Theory), Moscow, 1995, 529 p. (in Russ.)
3. Klimov G.P. *Stokhasticheskiye sistemy obsluzhivaniya* (Stochastic Queuing Systems), Moscow, 1966, 244 p. (in Russ.)
4. Kovalenko I.N. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya. Itogi nauki. Seriya Teoriya veroyatnostey* (Theory of Queuing. The Results of Science. Series Theory of Probability), 1963, Moscow, 1965, pp. 73–122. (in Russ.)
5. Kovalenko I.N. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya. Itogi nauki. Seriya Teoriya veroyatnostey. Matematicheskaya statistika Teoreticheskaya kibernetika* (Theory of Queuing. The Results of Science. Series Theory of Probability. Mathematical Statistics Theoretical Cybernetics), 1970, Moscow, 1971, pp. 5–109. (in Russ.)
6. Kovalenko I.N. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2010, no. 3, pp. 339–362.
7. Pechinkin A.V. *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics*, 1995, no. 1, pp. 77–86. (in Russ.)
8. Pechinkin A.V., Chaplygin V.V. *Automation and Remote Control*, 2004, no. 9(65), pp. 1429–1443, DOI: <https://doi.org/10.1023/B:AURC.0000041421.62689.a8>.
9. Dudin A.N., Vishnevsky V.M., Sinyugina Yu.V. *Telecommunication Systems*, 2016, no. 3(61), pp. 403–415, DOI: 10.1007/s11235-014-9946-8.
10. Butko T.K. *Primeneniye analiticheskikh metodov v teorii veroyatnostey* (Application of Analytical Methods in Probability Theory), Kyiv, 1983, pp. 17–27. (in Russ.)
11. Tarasov V.N. *Problems of Information Transmission*, 2016, no. 1, pp. 14–23.
12. Atkinson J.B., Kovalenko I.N. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2010, no. 3, pp. 426–435.
13. Chen Y., Whitt W. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2020, pp. 1–23, DOI: 10.1017/S0269964820000509.
14. Chen Y., Whitt W. *Operations Research Letters*, 2020, vol. 48, pp. 770–776, DOI: 10.1019/j.orl.2020.09.004.
15. Chen Y., Whitt W. *Queueing Systems*, 2020, vol. 94, pp. 327–356, DOI: 10.1007/s11134-020-09649-9.
16. Korolyuk V.S., Turbin A.F. *Protsessy markovskogo vosstanovleniya v zadachakh nadezhnosti system* (Markov Recovery Processes in Problems of System Reliability), Kyiv, 1982, 236 p. (in Russ.)
17. Korolyuk V.S. *Stokhasticheskiye modeli system* (Stochastic Models of Systems), Kyiv, 1989, 208 p. (in Russ.)
18. Korlat A.N., Kuznetsov V.N., Novikov M.I., Turbin A.F. *Polumarkovskiye modeli vosstanavlivayemykh sistem i sistem massovogo obsluzhivaniya* (Semi-Markovian Models of Recoverable Systems and Queuing Systems), Kishinev, 1991, 276 p. (in Russ.)
19. Kopp V.Ya., Obzherin Yu.E., Peschansky A.I. *Modelirovaniye avtomatizirovannykh liniy* (Modeling of Automated Lines), Sevastopol, 2006, 240 p. (in Russ.)
20. Obzherin Y.E., Peschanskii A.I. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2006, no. 5, pp. 656–666.
21. Kendall D. *Ann. Math. Statistics*, 1953, no. 3(24), pp. 338–354.
22. Beichelt F., Franken P. *Zuverlässigkeit und Instandhaltung, Mathematische Methoden*, Berlin, VEB Verlag Technik, 1983, 392 s.
23. Kai Lai Chung, *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*, Berlin, NY, Springer, 1967, vol. 104.

Data on author

Alexey I. Peschansky

— Dr. Sci., Professor; Sevastopol State University, Department of Higher Mathematics; E-mail: peschansky_sntu@mail.ru

Received 09.11.2022; approved after reviewing 26.11.2022; accepted for publication 20.03.2023.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ В КИБЕРФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Т. В. Аветисян, Я. Е. Львович, А. П. Преображенский*

Воронежский институт высоких технологий, Воронеж, Россия
**app@vivt.ru*

Аннотация. Рассматриваются особенности решения задач, связанных с оптимизацией процессов передачи информации в киберфизических системах на производственных предприятиях. Представлен многоэтапный процесс принятия оптимального решения по формированию киберфизической системы, использование которой позволяет преодолеть трудности, связанные с большими размерностями анализируемой задачи. Продемонстрировано, какие условия накладываются на управляемые параметры. Представлена совокупность ограничений в системе. Приведена структурная схема процесса принятия оптимального решения, сводящегося к определенной процедуре. Показан принцип построения обобщенного критерия эффективности. Приведена совокупность экстремальных задач, используемых в ходе анализа киберфизической системы. Показано, как реализуется принцип оптимальности на основе системы функциональных уравнений, представленных в виде рекуррентных соотношений. Рассмотрены особенности распределения затрат по ресурсам в киберфизической системе и приведен пример рационального использования модульных мощностей в общей структуре системы. Представлены результаты математического моделирования, демонстрирующие возможность повышения эффективности процесса передачи данных.

Ключевые слова: киберфизическая система, процесс, оптимальность, оптимизация, моделирование

Ссылка для цитирования: Аветисян Т. В., Львович Я. Е., Преображенский А. П. Оптимизация процессов в киберфизических системах // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 5. С. 389—398. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-389-398.

OPTIMIZATION OF PROCESSES IN CYBER-PHYSICAL SYSTEMS

T. V. Avetisyan, Ya. E. Lvovich, A. P. Preobrazhensky*

Voronezh Institute of High Technologies, Voronezh, Russia
**app@vivt.ru*

Abstract. The features of solving problems related to the optimization of information transfer processes in cyber-physical systems at manufacturing enterprises are considered. A multi-stage process of making an optimal decision on the formation of a cyber-physical system is presented, the use of which makes it possible to overcome the difficulties associated with the large dimensions of the analyzed problem. Conditions imposed on the controlled parameters are revealed. A set of restrictions in the system is presented. A block diagram of the process of making an optimal decision reduced to a certain procedure, is given. A principle of constructing a generalized efficiency criterion is shown. A set of extremal problems used in the course of a cyber-physical system analysis is formulated. On the basis of a system of functional equations presented in the form of recurrent relations, realization of the optimality principle is demonstrated. The features of costs distribution by resources in a cyber-physical system are considered and an example of the rational use of modular capacities in the overall structure of the system is given. The results of mathematical modeling are presented to demonstrate the possibility to increase the efficiency of the data transmission process.

Keywords: cyber-physical system, process, optimality, optimization, modeling

For citation: Avetisyan T. V., Lvovich Ya. E., Preobrazhensky A. P. Optimization of processes in cyber-physical systems. *Journal of Instrument Engineering*. 2023. Vol. 66, N 5. P. 389—398 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-389-398.

Введение. В настоящее время в производственной сфере наблюдается активное внедрение и развитие элементов киберфизических систем. В таких системах происходит процесс циркуляции больших объемов данных, имеющих разные приоритеты. Этим обуславливается

необходимость решения задач по оптимизации ресурсов, используемых при формировании киберфизических систем на основе модульных структур [1, 2].

При проектировании киберфизических систем многие разработчики опираются на интеграционные подходы. Например, парадигма проектирования Девопс базируется на требованиях об уменьшении разрыва между разработкой системы и ее непрерывной модернизацией в жизненном цикле. На практике от водопадных моделей процессов разработчики систем переходят к циклическим и спиральным моделям. Другой возможный подход, позволяющий минимизировать разрыв между этапами жизненного цикла киберфизической системы, — использование методологии ITIL (Information Technology Infrastructure Library — библиотека инфраструктуры информационных технологий) [3]. Сейчас также наблюдается развитие подходов, которые базируются на использовании свойств вариабельности (agility) киберфизических систем [4], при этом необходимо обеспечивать целостность данных в протоколах управления системами. Представляет интерес разработка модели, позволяющей учесть многошаговость процесса внутри киберфизических систем в рамках методов динамического программирования.

Цель настоящей статьи — разработка комбинированного алгоритма, позволяющего принимать оптимальные решения по формированию киберфизических систем на производственных предприятиях.

Многошаговый процесс принятия оптимального решения при формировании киберфизической системы [5]. Используется подход, который базируется на задаче нелинейного программирования, если рассматривать математическую модель, позволяющую принимать оптимальное решение в общем виде

$$\min_{x \in D} Q(x), \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — вектор управляемых переменных, описывающий модули, которые формируют киберфизическую систему; D — область допустимых решений.

Размерность в оптимизационной задаче (1) в ходе реализации численного решения будет оказывать значительное влияние на характеристики эффективности. По оптимизируемым переменным x , когда принимается оптимальное решение, выбор численных значений, соответствующих всем n компонентам, осуществляется одновременно. Это может привести к тому, что поиск оптимального решения x^* при большой размерности в задаче (1) будет затруднен. Для преодоления указанной трудности предлагается процесс принятия решения рассматривать как N -шаговый. Тогда принятие оптимального решения будет реализовано многошаговым образом (ПОРМ). Осуществляется разбиение процесса на N частей, $q_k = (x_{j1}, x_{jm}) \in D, k = \overline{1, N}$, не связанных между собой и выделяемых в векторе оптимизируемых переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$. В результате формируется вектор управляемых параметров. Для выбора каждой из этих частей используется соответствующий шаг ПОРМ. При этом важно выполнение двух условий, которые связаны с управляемыми параметрами:

1) формируется исходный вектор x на основе всех векторов $q_k, k = \overline{1, N}$, соединяющих соответствующие компоненты x_j :

$$\bigcup_{k=1}^N q_k = (x_1, \dots, x_n);$$

2) любая составляющая x_j , относящаяся к исходному вектору x , может быть связана лишь с одним из векторов q_k :

$$q_k \cap q_i = \emptyset, k, i = \overline{1, N}, k \neq i.$$

Анализ показывает, что реализация ПОРМ рассматривается как оптимизационный подход для задачи (1). При этом используются векторы q_k , $k = \overline{1, N}$, а не один вектор, которые характеризуются меньшей размерностью, если проводить сравнение с первичным вектором переменных x .

Введем в ПОРМ обозначение индекса „1“, который связан с N -м шагом; он показывает конечное состояние. Нумерацию осуществим справа налево по шагам. Будем использовать обратную систему индексов для того, чтобы показать развертывание во времени многошагового процесса принятия решения. В ходе моделирования при первом шаге происходит выбор вектора управляемых параметров q_1 . Далее выполняется шаг $N-1$, который связан с вектором q_{N-1} . Процедура повторяется до шага „1“, являющегося последним и соответствующего вектору N . Это иллюстрируется рис. 1.

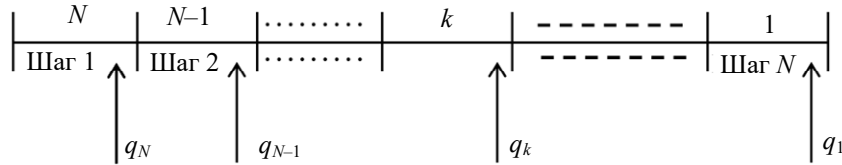


Рис. 1

В представленной схеме можно выделить k -й шаг относительно конца ПОРМ.

Используем векторы состояний p_{k+1} и p_k для рассмотрения вектора q_k , который будет соответствовать управляемым параметрам, а также осуществлять их выбор относительно k -го шага. В ходе рассмотрения полагаем, что по каждому из шагов число переменных состояния одинаково и равно m . В этом случае можно выделить вектор переменных, который соответствует вектору начального состояния до того, как будет принято решение, соответствующее k -му шагу:

$$p_{k+1} = (p_{k+1,1}, p_{k+1,2}, \dots, p_{k+1,m}).$$

После принятия решения приходим к вектору конечного состояния:

$$p_k = (p_{k1}, p_{k2}, \dots, p_{km}).$$

Вектор состояния до того, как будет реализован k -й шаг, соответствует p_{k+1} . В этом случае следующий вектор переменных соответствует начальному состоянию

$$p_{N+1} = (p_{N+1,1}, p_{N+1,2}, \dots, p_{N+1,m}),$$

в свою очередь, такой вектор переменных связан с конечным состоянием

$$p_1 = (p_{1,1}, p_{1,2}, \dots, p_{1,m}).$$

Предположим, что задано правило, позволяющее осуществлять процесс преобразования от начального состояния p_{k+1} к конечному p_k при заданном векторе управляемых параметров q_k на k -м шаге:

$$p_k = F_k(p_{k+1}, q_k).$$

Основываясь на ограничениях вида равенств или неравенств, связь между p_k , $k = \overline{1, N+1}$, и q_k , $k = \overline{1, N}$, можно в общем виде представить следующим образом:

$$\begin{aligned} g_j(p_1, \dots, p_{N+1}, q_1, \dots, q_N) &= 0, j = \overline{1, M}; \\ f_i(p_1, \dots, p_{N+1}, q_1, \dots, q_N) &\geq 0, i = \overline{1, L}. \end{aligned} \quad (2)$$

Система ограничений (2) образует множество D_q . Считается, что в случае удовлетворения указанной системе вектор управляемых параметров q_k будет рассматриваться как допустимый. Предположим, что анализируется множество векторов $(q_1, \dots, q_N)$ и для каждого из них формируется допустимый вектор управляемых параметров:

$$q_k \in D_q, \quad k = \overline{1, N}.$$

Тогда стратегия q рассматривается как допустимая. Конечное состояние p_{k+1} может быть зафиксировано. Для сравнения разных допустимых векторов по управляемым параметрам q_k может быть использован показатель эффективности по k -му шагу $R_k(p_{k+1}, q_k)$. Процесс принятия оптимального решения сводится к некоторой процедуре (рис. 2). Начальное состояние соответствует k шагам с индексами $(k, k-1, \dots, 2, 1)$. В этом случае говорят о k -шаговом конфинальном подпроцессе, который будет соответствовать любому из векторов переменных состояний p_{k+1} . Такой процесс показывает, каким образом вектор управляемых параметров q_k будет оказывать влияние на дальнейшие состояния $(p_k, p_{k-1}, \dots, p_1)$. При этом важен выбор текущего состояния p_{k+1} , тогда как предыдущие состояния $p_{N+1}, p_N, \dots, p_{k+2}$ не будут оказывать влияние.

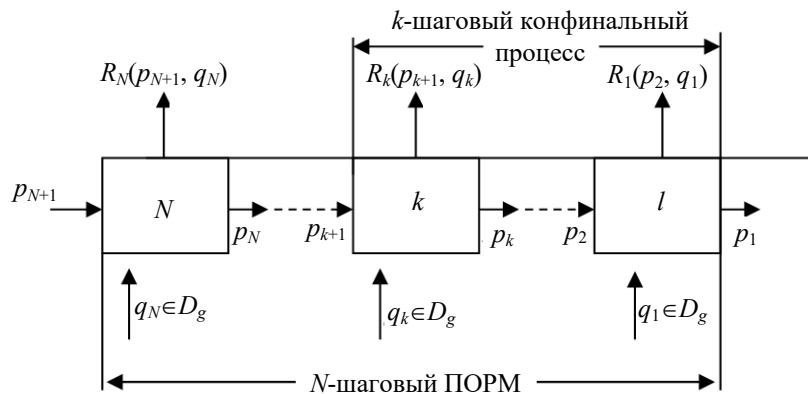


Рис. 2

При проведении моделирования необходимо использовать общую шкалу измерения или приводить к безразмерному виду показатели эффективности по любому из шагов $R_k(p_{k+1}, q_k), k = \overline{1, N}$. Используя свойство аддитивности, можно за счет суммирования показателей прийти к обобщенному критерию эффективности

$$R(q_1, \dots, q_N, p_{k+1}) = \sum_{k=1}^N R_k(p_{k+1}, q_k),$$

который соответствует многошаговому процессу в целом. В этом случае следует опираться на задачу оптимизации, когда рассматриваются процессы принятия решения:

$$f_N(p_N + 1)R(q_1^*, \dots, q_N^*, p_{N+1}) = \min_{(q_1, \dots, q_N) \in D_q} \left\{ \sum_{k=1}^N R_k(p_k + 1, q_k) \right\}. \quad (3)$$

Если рассматривается многошаговый процесс ПОРМ, то функция $f_N(p_N + 1)$ определяет, каким будет минимальное значение обобщенного критерия эффективности. Вектор переменных $p_N + 1$ будет оказывать влияние на характеристики начального состояния. В качестве оптимальной допустимой стратегии анализируется $(q_1^*, \dots, q_N^*)$, за счет которой и приходим к значениям $f_N(p_N + 1)R(q_1^*, \dots, q_N^*, p_{N+1})$.

Использование принципа оптимальности при моделировании [6]. Для реализации общего подхода к моделированию киберфизической системы и для ее оптимизации можно использовать выражение (3). Пусть рассматривается целое число шагов k ($0 \leq k \leq N$). Предположим, что начальным состоянием будет p_{k+1} . Используя неотрицательный параметр p ($0 \leq p \leq p_0$), можно сформировать множество экстремальных задач:

$$f_k(p) = \min_{(x_1, \dots, x_k)} \left\{ \sum_{i=1}^k R_i(x_i) \right\}, \quad (4)$$

при этом учитываем, что

$$\sum_{i=1}^k x_i \leq p; \quad x_i \geq 0, i = \overline{1, k}. \quad (5)$$

Задачи (4), (5) могут быть упрощены, если рассматриваются три соответствующих варианта.

Вариант 1. Принимаем количество распределяемого ресурса равным нулю — $p = 0$:

$$f_k(0) = 0 \quad \text{при } k = \overline{1, N}.$$

Видно, что показатель эффективности по k -му шагу $R_k(0) = 0$ в случае отсутствия ресурса.

Вариант 2. Если $k = 0$, то приходим к окончанию процесса, связанного с принятием решений:

$$f_0(p) = 0 \quad \text{при } p > 0. \quad (6)$$

Предположим, что имеется некоторое положительное количество ресурсов. Из соотношения (6) видно, что если решение принято, то на k -м шаге нельзя прийти к заключению, что показатель эффективности будет иметь положительное значение.

Вариант 3. Принимаем, что есть один шаг, т.е. $k=1$, в процессах, связанных с принятием оптимальных решений:

$$f_1(p) = \min R_1(x_1) \quad \text{при } x_1 \geq 0, x_1 \leq p. \quad (7)$$

Анализ показывает, что минимальное значение показателя эффективности $R_1(x_1)$ и минимальное значение функции $f_1(p)$ будут равны.

Если требуется связать минимальное значение обобщенного показателя в $(k-1)$ -шаговом конфинальном подпроцессе $f_{k-1}(p_k)$ и обобщенный показатель, соответствующий k -шаговому конфинальному подпроцессу $f_k(p_{k+1})$, то необходимо опираться на рекуррентное соотношение [7]

$$f_k(p_{k+1}) = \min_{0 \leq x_k \leq p_{k+1}} \{R_k(x_k) + f_{k-1}(p_{k+1} - x_k)\}, \quad k = \overline{1, N},$$

которое можно рассматривать как систему функциональных уравнений.

Для определения последовательности, сформированной на базе минимальных значений $f_k(p)$, $k = \overline{1, N}$, может быть использован вариант 3. Иными словами, для того чтобы идти от конца процесса (шага, имеющего индекс „1“, см. рис. 1) к началу (шагу, имеющему индекс „N“), используется соотношение (7). Важно, чтобы одномерные задачи оптимизации были решены последовательным образом:

$$\left. \begin{aligned} f_1(p_2) &= \min_{0 \leq x_1 \leq p_2} \{R_1(x_1)\}; \\ f_2(p_3) &= \min_{0 \leq x_2 \leq p_3} \{R_2(x_2) + f_1(p_3 - x_2)\}; \\ &\dots \dots \dots \\ f_N(p_{N+1}) &= \min_{0 \leq x_N \leq p_{N+1}} \{R_N(x_N) + f_{N-1}(p_{N+1} - x_N)\}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Реализация метода динамического программирования осуществляется на основе множества представленных функциональных уравнений (8). Размерность задачи за счет использования такого метода будет понижена. Тогда каждый из шагов будет связан с одномерной задачей оптимизации. При этом необходимо предусмотреть дополнительный объем памяти, поскольку в него будут заноситься значения $f_k(p)$, соответствующие диапазону $p \in [0, P_0]$, в котором будут выбираться дискретные значения. Это связано с отсутствием информации о том, какое значение p принимается в качестве наилучшего на k -м шаге. Когда рассматривается N -й шаг, ему соответствует значение p , являющееся наилучшим и равное $p_{N+1} = p_0$.

Здесь можно говорить о реализации принципа оптимальности в рамках сформированной системы функциональных уравнений (8). Поясним его основную идею.

Чтобы осуществить распределение ресурса p_{k+1} , неважно, каким образом формируется выражение $(x_N, \dots, x_{k+1}) \in D_q$, т.е., можно опираться на стратегию $(x_N^*, \dots, x_{k+1}^*)$, которая будет оптимальной. Также возможно опираться на некоторую стратегию $(x_k, \dots, x_1)$, которая связана с оставшимися k шагами в конфинальном подпроцессе. Важно, чтобы по показателю эффективности $R_k(x_k)$, соотносённому с k -м шагом, было обеспечено минимальное значение. Кроме того, требуется, чтобы по $f_{k-1}(p_k)$ — обобщенному показателю в $(k-1)$ -шаговом конфинальном подпроцессе — было обеспечено минимальное значение.

Если будет допущена ошибка по управляемому параметру x_k^* , то возможностей для ее исправления на дальнейших шагах, соответствующих индексам „ $k-1$ “, „ $k-2$ “, ..., „ 1 “, не будет, т.е. необходимо учитывать последствия совершенного неправильного выбора.

Оптимизация состава киберфизической системы [8]. Пусть при фиксированном промежутке времени имеется информация относительно программы работы киберфизической системы по выделенному технологическому участку. Данная программа может в течение времени существенным образом меняться (рис. 3).

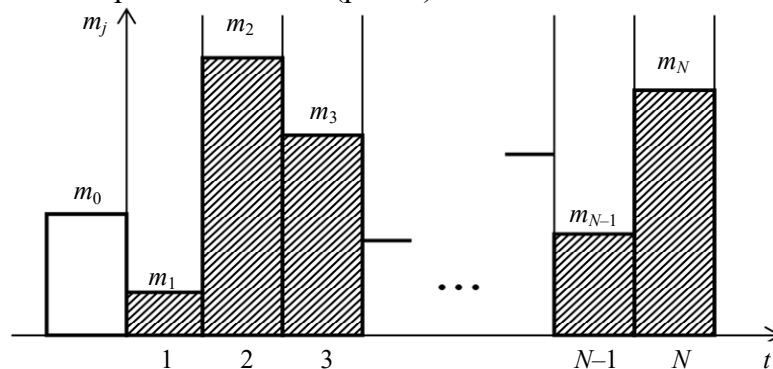


Рис. 3

Пусть для j -го периода времени относительно объемов данных, которые требуется передавать, имеется плановое задание $m_j, j = \overline{1, N}$. Также для этого периода времени реальное по объемам данных значение равно $q_j = x_j, j = \overline{1, N}$.

Необходимо учитывать возникающие в этом случае затраты производственных ресурсов, в частности объем передаваемых данных, мощности оборудования, обслуживающий персонал. Исходим из того, что выполняется плановое задание m_j :

$$x_j \geq m_j, j = \overline{1, N}.$$

Объем передаваемых данных $x_{N+1} = x_0$ показывает те затраты, которые в ходе планирования будут переноситься с предыдущих периодов. Предположим, что возникает ситуация, в

которой отсутствуют затраты на используемую мощность киберфизической системы. Тогда плановые задания и оптимальный график, связанный с передачей данных, совпадают:

$$x_i^* \geq m_i^*, j = \overline{1, N}.$$

Возможна ситуация, когда в киберфизической системе соответствующий передаче данных график невыгодно применять, если анализировать все затраты: например, в случаях, когда в каждом периоде времени будут большие затраты, связанные как с ростом, так и с уменьшением производственных мощностей [9].

Затраты, относящиеся к хранению данных, должны быть учтены при передаче данных, объем которых превышает плановое задание $(x_j - m_j)$. Отличие планового задания от фактического можно представить на основе функции затрат

$$g_j(x_j - m_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_j = m_j; \\ b_j(x_j - m_j)^2, & \text{если } x_j > m_j, \end{cases} \quad (9)$$

учитывая, что $b_j > 0, j = \overline{1, N}$, — стоимость хранения единицы объема данных.

Затраты, связанные с изменением мощности киберфизической системы, должны быть учтены вместе с затратами, которые относятся к хранению данных (9). Если при планировании осуществлять переход от $(j+1)$ -го периода к j -му, то будет выполняться соотношение $x_j \neq x_{j+1}$. При введении новых мощностей необходимо оценить, какие потребуются затраты, связанные с дополнительными средствами. Для этого предлагается применять функцию издержек сглаживания:

$$\varphi_j(x_j - x_{j+1}) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_j = x_{j+1} \text{ (мощности киберфизической системы} \\ & \text{не меняются);} \\ 0, & \text{если } x_j < x_{j+1} \text{ (затраты на уменьшение мощностей} \\ & \text{киберфизической системы равны нулю);} \\ a_j(x_j - x_{j+1})^2, & \text{если } x_j > x_{j+1} \text{ (затраты, связанные с увеличением} \\ & \text{мощностей киберфизической системы),} \end{cases}$$

здесь $a_j > 0, j = \overline{1, N}$, — стоимость, связанная с вводом единицы новой производственной мощности.

Общие затраты, которые связаны с процессом передачи данных, необходимо минимизировать. Для этого решение следует принимать по объемам передаваемых данных и данных, которые будут передаваться в соответствующие периоды планирования $x_j^*, j = \overline{1, N}$. Математическую модель представим следующим образом [10—11]:

$$\begin{aligned} F_N(x_0) &= \min_{\substack{(x_1, \dots, x_N) \\ x_j \geq m_j, j = \overline{1, N}}} \left\{ \sum_{i=1}^N q_i (q_j(x_j - m_j) + \varphi_j(x_j - x_{j+1})) \right\} = \\ &= \max_{\substack{(x_1, \dots, x_N) \\ x_j \geq m_j, j = \overline{1, N}}} \left\{ \sum_{i=1}^N q_i (q_j(x_j - x_{j+1})^2 + B_j(x_j - m_j)^2) \right\}, \\ x_j &= 0, 1, 2 \dots \text{ — целые числа.} \end{aligned}$$

Можно рассматривать одномерные задачи оптимизации, если анализируется обозначенная задача:

$$f_1(p_2) = \min_{x_1 \geq m_2} \{a_1(x_1 - p_2)^2 + B_j(x_1 - m_1)^2\}, \quad (10)$$

где x_1 — целое число;

$$f_k(p_k + 1) = \min_{x_k \geq m_k} \{a_k(x_k - p_{k+1})^2 + B_k(x_k - m_k)^2\} + f_{k-1}(p_k), \quad k = \overline{2, N}. \quad (11)$$

Предположим, что плановое задание, связанное с передачей данных, отсутствует. Тогда выполняется условие $m_j = 0, j = \overline{1, N}$. Для решения системы функциональных уравнений (10), (11) необходимо опираться на следующие шаги [12, 13].

Шаг 1. Вводится параметр

$$w_1 = a_1 b_1 / (a_1 + b_1).$$

Шаг 2. Вычисляется множество параметров с использованием рекуррентного подхода:

$$w_k = (a_k b_k + a_k w_{k-1}) / (a_1 + b_1 + w_{k-1}), \quad k = \overline{2, N}.$$

Шаг 3. Вычисляются полные издержки в производственном процессе с точки зрения достижения ими минимального значения:

$$f_N(x_0) = f_N(p_{N+1}) = w_N x_0^2.$$

Шаг 4. По N -му планируемому периоду определяются значения, связанные с фактическим изменением характеристик объектов в системе:

$$x_N^* = \frac{a_N p_{N+1}}{a_N + b_N + w_{N-1}}.$$

Шаг 5. Для каждого из планируемых периодов вычисляются значения, характеризующие фактический объем передаваемых данных; используется рекуррентное выражение

$$x_k^* = \frac{a_k x_{k+1}^*}{a_k + b_k + w_{k-1}}, \quad k = \overline{N-1, 2}.$$

Шаг 6. Для шага 1 определяется объем передаваемых данных:

$$x_1^* = \frac{a_1 x_2^*}{a_1 + b_1}.$$

Таким образом, приходим к оптимальному плану передачи данных в киберфизической системе $(x_1^*, \dots, x_N^*)$ за счет решения последовательности одномерных задач оптимизации (10), (11). Компоненты оптимального плана незначительно отличаются от плановых заданий $(m_1, \dots, m_N)$. Кроме того, имеется небольшое отличие с точки зрения того, какими будут полные затраты, обусловленные организацией процесса передачи данных внутри киберфизической системы [14].

Заключение. Рассмотрены особенности оптимизации киберфизической системы на производственных предприятиях. Можно отметить ключевые результаты работы: многоэтапный процесс принятия оптимального решения при создании киберфизической системы, принцип оптимальности, задачи одномерной оптимизации, иллюстрация рационального применения ресурсов и модулей системы. Результаты математического моделирования позволяют обеспечить повышение эффективности киберфизической системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lvovich I., Lvovich Y., Preobrazhenskiy A. Modeling the processes of increasing the efficiency of the internet of things system // Proc. Intern. Conf. on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM 2022). 2022. P. 1030—1034.

2. Lvovich I., Lvovich Y., Preobrazhenskiy A. Modeling the classification of internet of things objects by failures // Proc. Intern. Conf. on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM 2022). 2022. P. 1035—1039.
3. Ингланд П. Овладевая ITIL. М.: Лайвбук, 2011. 200 с.
4. Muhammad Ali Babar, Brown A. W., Mistrik I. Agile software architecture aligning agile processes and software architectures. MA, USA: Morgan Kaufmann, 2014.
5. Lvovich I. Ya., Preobrazhenskiy A. P., Preobrazhenskiy Yu. P., Lvovich Ya. E. Modeling and optimization internet of things systems in companies // Proc. SPIE. Computer Applications for Management and Sustainable Development of Production and Industry (CMSD 2021). 2022. P. 122510D.
6. Lvovich I. Ya., Preobrazhenskiy A. P., Preobrazhenskiy Yu. P., Lvovich Ya. E. Modeling and optimization of resources in information systems // Proc. SPIE. Computer Applications for Management and Sustainable Development of Production and Industry (CMSD 2021). 2022. P. 122510E.
7. Lvovich I. Y., Preobrazhenskiy A. P., Lvovich Y. E., Choporov O. N. Algorithmization of control of information and telecommunication systems based on the optimization model // Procedia Computer Science: 14th Intern. Symp. „Intelligent Systems“ (INTELS 2020). 2021. P. 563—570.
8. Modelling and optimizing sensor wireless network systems / I. Ya. Lvovich, Ya. E. Lvovich, A. P. Preobrazhenskiy, Yu. P. Preobrazhenskiy, O. N. Choporov // Journal of Physics: Conf. Series. II Intern. Scientific Conf. on Metrological Support of Innovative Technologies (ICMSIT II-2021). Krasnoyarsk, 2021. P. 22080.
9. Мещеряков Р. В., Исхаков А. Ю., Евсютин О. О. Современные методы обеспечения целостности данных в протоколах управления киберфизических систем // Тр. СПИИРАН. 2020. Т. 5, вып. 19. С. 1089—1122.
10. The investigation of the characteristics of conflicts in industrial organizations based on modeling / I. Ya. Lvovich, A. P. Preobrazhenskiy, Y. P. Preobrazhenskiy, Y. E. Lvovich, O. N. Choporov // IFAC-PapersOnLine. 2021. N 20. P. 477—481.
11. Lvovich I., Preobrazhenskiy A., Lvovich Y., Choporov O. Optimization of internet of things system // Communications in Computer and Information Science. 2021. Vol. 1448. P. 135—148.
12. Models for evaluating the performance of complex information and communication systems / I. Ya. Lvovich, Ya. E. Lvovich, A. P. Preobrazhenskiy, Yu. P. Preobrazhenskiy, O. N. Choporov // Journal of Physics: Conf. Series. Krasnoyarsk, 2020. P. 22099.
13. Preobrazhenskiy Yu. P., Azer K. M. V., Dzhumageldiev D. Some characteristics of computer networks // Вестник Воронежского института высоких технологий. 2022. № 1 (40). С. 86—88.
14. Львович Я. Е., Преображенский Ю. П., Ружицкий Е. Особенности оптимизации беспроводных систем связи // Вестник Воронежского института высоких технологий. 2022. № 1 (40). С. 68—71.

Сведения об авторах

- | | |
|---------------------------------------|---|
| Татьяна Владимировна Аветисян | — Воронежский институт высоких технологий, кафедра информационных систем и технологий; ст. преподаватель;
E-mail: vtatyana_avetisyan@mail.ru |
| Яков Евсеевич Львович | — д-р техн. наук, профессор; Воронежский институт высоких технологий, кафедра информационных систем и технологий;
E-mail: office@vivt.ru |
| Андрей Петрович Преображенский | — д-р техн. наук, профессор; Воронежский институт высоких технологий, кафедра информационных систем и технологий;
E-mail: app@vivt.ru |

Поступила в редакцию 09.12.2022; одобрена после рецензирования 29.12.2022; принята к публикации 20.03.2023.

REFERENCES

1. Lvovich I., Lvovich Y., Preobrazhenskiy A. *Proceedings-2022 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2022*, 2022, pp. 1030—1034.
2. Lvovich I., Lvovich Y., Preobrazhenskiy A. *Proceedings-2022 International Conference on Industrial Engineering,*

- Applications and Manufacturing, ICIEAM 2022, 2022, pp. 1035–1039.*
3. England R. *Owning ITIL*, Two Hills, 2009.
 4. Babar M.A., Brown A.W., Mistrik I. *Agile Software Architecture Aligning Agile Processes and Software Architectures*, MA, USA, Morgan Kaufmann, 2014.
 5. Lvovich I.Ya., Preobrazhenskiy A.P., Preobrazhenskiy Yu.P., Lvovich Ya.E. *Proceedings of the International Society for Optical Engineering. Computer Applications for Management and Sustainable Development of Production and Industry, CMSD 2021, 2022, pp. 122510D.*
 6. Lvovich I.Ya., Preobrazhenskiy A.P., Preobrazhenskiy Yu.P., Lvovich Ya.E. *Proceedings of the International Society for Optical Engineering. Computer Applications for Management and Sustainable Development of Production and Industry, CMSD 2021, 2022, pp. 122510E.*
 7. Lvovich I.Y., Preobrazhenskiy A.P., Lvovich Y.E., Choporov O.N. *Procedia Computer Science. 14th International Symposium "Intelligent Systems", INTELS 2020, 2021, pp. 563–570.*
 8. Lvovich I.Ya., Lvovich Ya.E., Preobrazhenskiy A.P., Preobrazhenskiy Yu.P., Choporov O.N. *Journal of Physics: Conference Series. II International Scientific Conference on Metrological Support of Innovative Technologies (ICMSIT II-2021)*, Krasnoyarsk, 2021, pp. 22080.
 9. Meshcheryakov R., Iskhakov A., Evsutin O. *Trudy SPIIRAN (SPIIRAS Proceedings)*, 2020, no. 5(19), pp. 1089–1122. (in Russ.)
 10. Lvovich I.Ya., Preobrazhenskiy A.P., Preobrazhenskiy Y.P., Lvovich Y.E., Choporov O.N. *20th IFAC-PapersOnLine*, 2021, pp. 477–481.
 11. Lvovich I., Preobrazhenskiy A., Lvovich Y., Choporov O. *Communications in Computer and Information Science*, 2021, vol. 1448, pp. 135–148.
 12. Lvovich I.Ya., Lvovich Ya.E., Preobrazhenskiy A.P., Preobrazhenskiy Yu.P., Choporov O.N. *Journal of Physics: Conference Series*, Krasnoyarsk, Russian Federation, 2020, pp. 22099.
 13. Preobrazhenskiy Yu.P., Azer K.M.V., Dzhumageldiev D. *Bulletin of the Voronezh Institute of High Technologies*, 2022, no. 1(40), pp. 86–88. (in Russ.)
 14. Lvovich Ya.E., Preobrazhenskiy Yu.P., Ruzhitsky E. *Bulletin of the Voronezh Institute of High Technologies*, 2022, no. 1(40), pp. 68–71. (in Russ.)

Data on authors

- | | |
|----------------------------------|---|
| Tatiana V. Avetisyan | — Voronezh Institute of High Technologies, Department of Information Systems and Technologies; Senior Lecturer;
E-mail: vtatyana_avetisyan@mail.ru |
| Yakov E. Lvovich | — Dr. Sci., Professor; Voronezh Institute of High Technologies, Department of Information Systems and Technologies; E-mail: office@vivt.ru |
| Andrey P. Preobrazhenskiy | — Dr. Sci., Professor; Voronezh Institute of High Technologies, Department of Information Systems and Technologies; E-mail: app@vivt.ru |

Received 09.12.2022; approved after reviewing 29.12.2022; accepted for publication 20.03.2023.

**СТРУКТУРИРОВАННЫЕ ПО УОЛШУ
ДВУХУРОВНЕВЫЕ И МОДУЛЬНО ДВУХУРОВНЕВЫЕ
КВАЗИОРТОГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ
ДЛЯ МАСКИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

А. М. СЕРГЕЕВ

*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
Санкт-Петербург, Россия
aleks.asklab@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается отдельный класс квазиортогональных матриц, а именно двухуровневые матрицы Мерсенна, структурированные по Уолшу. Показано отличие систем ортогональных функций Адамара — Уолша и Мерсенна — Уолша. Рассматриваются модульно двухуровневые матрицы Мерсенна — Уолша и их портреты. Система функций на основе модульно двухуровневой матрицы Мерсенна — Уолша имеет вдвое больше уровней, чем система функций, построенная на основе двухуровневой матрицы Мерсенна, структурированной по Уолшу. В качестве прикладной задачи с использованием структурированных квазиортогональных матриц рассматривается процедура маскирования двухуровневыми и модульно двухуровневыми матрицами Мерсенна — Уолша изображений с оценкой результатов маскирования — разрушения исходного изображения. На примере тестового изображения демонстрируется изменение гистограммы яркостей и влияние порядка маскирующей матрицы на результат маскирования.

Ключевые слова: квазиортогональные матрицы, матрицы Адамара — Уолша, матрицы Мерсенна — Уолша, модульно двухуровневые матрицы, маскирование изображений

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № FSRF-2023-0003.

Ссылка для цитирования: Сергеев А. М. Структурированные по Уолшу двухуровневые и модульно двухуровневые квазиортогональные матрицы для маскирования изображений // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 5. С. 399—408. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-399-408.

**TWO-LEVEL AND MODULARLY TWO-LEVEL QUASI-ORTHOGONAL
WALSH-STRUCTURED MATRICES FOR IMAGE MASKING**

A. M. Sergeev

*St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,
St. Petersburg, Russia
aleks.asklab@gmail.com*

Abstract. A separate class of quasi-orthogonal matrices, namely, two-level Mersenne matrices structured according to Walsh, are studied. The difference between the systems of orthogonal Hadamard–Walsh and Mersenne–Walsh functions is shown. Modular two-level Mersenne–Walsh matrices and their portraits are considered. A system of functions constructed using a modularly two-level Mersenne–Walsh matrix has twice as many levels as a system of functions constructed on the basis of a two-level Mersenne matrix structured according to Walsh. As an applied problem using structured quasi-orthogonal matrices, the procedure for masking images with two-level and modularly two-level Mersenne–Walsh matrices with an assessment of the results of masking - destruction of the original image is considered. The example of a test image demonstrates the change in the brightness histogram and the influence of the order of the masking matrix on the masking result.

Keywords: quasi-orthogonal matrices, Hadamard–Walsh matrices, Mersenne–Walsh matrices, modular two-level matrices, image masking

Acknowledgments: the work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement No. FSRF-2023-0003.

For citation: Sergeev A. M. Two-level and modularly two-level quasi-orthogonal Walsh-structured matrices for image masking. *Journal of Instrument Engineering*. 2023. Vol. 66, N 5. P. 399—408 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-399-408.

Введение. Матрицы являются основой ряда методов преобразования информации, таких как помехоустойчивое кодирование, сжатие и обработка изображений, криптография и др. [1—6]. Принципиально матрицы могут быть любые, но важно, чтобы для квадратной матрицы $\mathbf{A}_n$ порядка n , используемой для кодирования/сжатия/маскирования/шифрации, была вычислима точно обратная матрица $\mathbf{A}_n^{-1}$ для декодирования/декомпрессии/демаскирования/дешифрации. Однако проблема состоит в том, что абсолютно точно вычислить $\mathbf{A}_n^{-1}$ не представляется возможным, особенно для матриц высоких порядков.

Для перечисленных задач наиболее востребованы ортогональные и квазиортогональные матрицы.

Матрица $\mathbf{A}_n$ является ортогональной [2], если выполняется условие

$$\mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_n = \mathbf{I}_n, \quad (1)$$

где $\mathbf{A}_n^T$ — транспонированная матрица $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{I}_n$ — единичная матрица.

Особенность ортогональных матриц заключается в том, что для них вычислять обратную матрицу нет необходимости, поскольку $\mathbf{A}_n^{-1} = \mathbf{A}_n^T$, а транспонирование сводится к замене строк на столбцы исходной матрицы $\mathbf{A}_n$. Транспонированная матрица, в отличие от обратной, представляется точно, что позволяет исключить внесение погрешностей в вычисления.

Количество ортогональных матриц принципиально не ограничено ни по порядкам их существования, ни по количеству, но их вычисление с алгоритмической точки зрения затруднительно. Введение ограничений на параметры ортогональных матриц позволяет преодолеть трудности, но значительно сужает их класс и требует систематизации методов их вычислений.

Известно, что матрицы наследуют структурные характеристики методов их вычислений на порядках существования. Однако структурные инварианты не всегда являются полезными для конкретных задач их применения.

Цель настоящей статьи — показать преимущество модульно двухуровневых квазиортогональных матриц Мерсенна — Уолша для использования в широком круге технических применений на примере маскирования изображений.

Двухуровневые квазиортогональные матрицы. Наиболее известными ортогональными матрицами с ограничением на количество и возможные значения их элементов (уровни) являются матрицы Адамара $\mathbf{H}_n$ [2, 7], состоящие из элементов двух значений: 1 и -1 , для которых выполняется условие

$$\mathbf{H}_n^T \mathbf{H}_n = n \mathbf{I}_n. \quad (2)$$

Жесткое ограничение на элементы матрицы Адамара приводит к тому, что они существуют не на всех порядках n , а только на $n = 4t$, где t — натуральное число. И, строго говоря, матрица Адамара является квазиортогональной, так как условия (1) и (2) отличаются коэффициентом n перед $\mathbf{I}_n$, что эквивалентно коэффициенту $1/n$ для элементов в самой матрице Адамара.

Востребованность двухуровневых матриц Адамара в технических приложениях, связанных с обработкой и преобразованием цифровой информации, объясняется именно целочисленностью значений уровней, что позволяет эффективно выполнять операции умножения с ними [8] на любых процессорах.

Как обобщение ортогональных матриц в [9] используются квазиортогональные матрицы Мерсенна $\mathbf{M}_n$, имеющие также два значения элементов: 1 и $-b$. Эти матрицы существуют на нечетных соседних с матрицами Адамара порядках, принадлежащих последовательности $4t - 1$ [10], включающей последовательность чисел Мерсенна, и для них выполняется условие

$$\mathbf{M}_n^T \mathbf{M}_n = \omega(n) \mathbf{I}_n. \quad (3)$$

Коэффициент $\omega(n)$ в выражении (3) и значение элемента b матрицы $\mathbf{M}_n$ являются функциями от t и в общем случае они иррациональны и вариативны при изменении порядка n . Теория матриц Мерсенна тесно связана с доказательством гипотезы Адамара [11].

Для приведенных матриц Мерсенна уровень b , если второй элемент имеет уровень 1, вычисляется как $1/2$ при $n=3$, а в остальных случаях — как $b = (q - \sqrt{4q})/(q - 4)$, где $q=n+1$ (порядки матриц Адамара). Значению уровня b присваивается знак минус для удовлетворения требований по дизайну строк таких матриц и их структуры в целом [10].

Вычисления с двухуровневыми матрицами Мерсенна также эффективно выполняются в процессорах цифровой обработки сигналов и других процессорах с аппаратной реализацией операций умножения.

Для наглядного представления матриц и выявления особенностей их структур, как правило, используется аппарат портретов [12, 13], где элементы представлены полями разного цвета. Для двухуровневых матриц это поля черного цвета, соответствующие значению -1 или $-b$, и белого цвета, соответствующие значению 1.

На рис. 1, а, б для примера приведены портреты соответственно матрицы Мерсенна порядка 15, вычисленной модифицированным методом Пэли [14], и матрицы Адамара порядка 16, вычисленной методом Сильвестра.

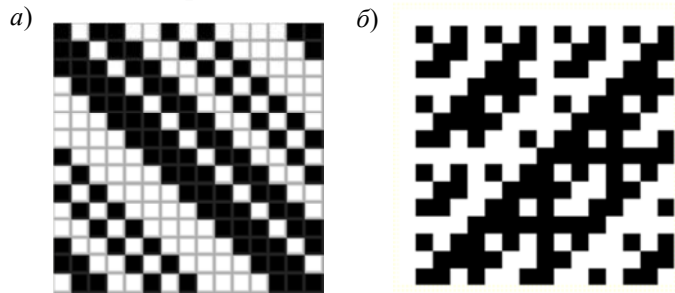


Рис. 1

Приведенные матрицы, как и матрицы других порядков, полученные указанными методами, имеют явно выраженные структуры, что успешно используется при выполнении преобразований с ними [6, 15]. Однако матрицы Адамара и Мерсенна могут быть без потери ортогональности структурно преобразованы перестановкой строк и столбцов к другим структурам.

Двухуровневые квазиортогональные матрицы, структурированные по Уолшу. В предположении, что значения элементов двухуровневых матриц Адамара по строкам или столбцам отражают переключение уровня сигналов, как в упрощенном аналоге тригонометрической системы Радемахера [16], путем перестановки строк и столбцов матрицы могут быть структурированы по Уолшу [17]. Тогда столбцы (строки) в них, начиная с первого (низкой частоты переключения), посредством перехода своих уровней отображают ортогональные функции Уолша [18]. На рис. 2 приведен портрет структурированной по Уолшу матрицы Адамара порядка 16, представленной на рис. 1, б.

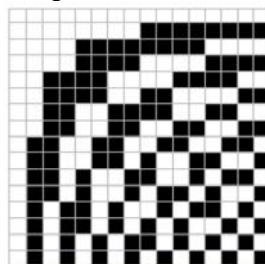


Рис. 2

Матрицы Мерсенна аналогично могут быть структурированы по Уолшу [19], однако ортогональные функции при этом принимают два несимметричных значения $\{1, -b\}$, где $b < 1$.

Определение 1. Матрицу Мерсенна с упорядоченными по частоте смены знака элементами в столбцах будем называть матрицей Мерсенна, упорядоченной по Уолшу, или матрицей Мерсенна — Уолша.

Определение 2. Систему генерируемых ортогональных функций на основе матрицы Мерсенна — Уолша будем называть системой функций Мерсенна — Уолша.

В качестве примера на рис. 3 приведены матрицы Мерсенна — Уолша начальных порядков 7, 15 и 31.

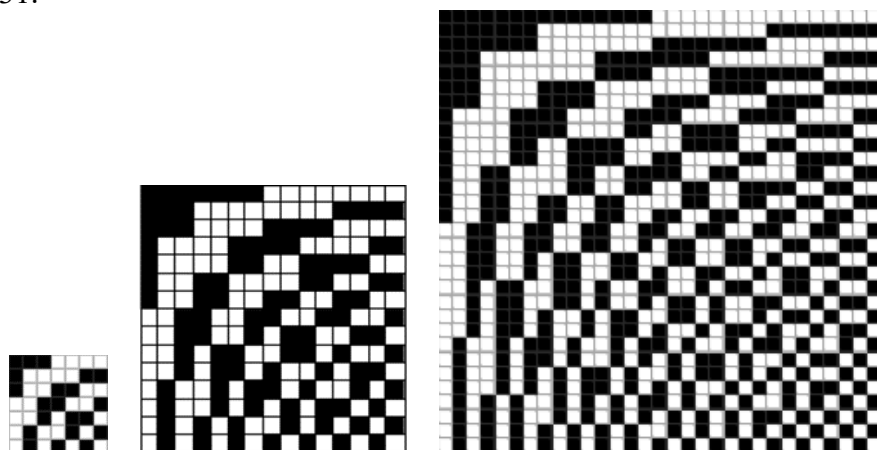


Рис. 3

Система ортогональных функций Мерсенна — Уолша отличается от системы классических функций Уолша. Особенности и причины, по которым этот базис может быть интересным [20], следующие.

Во-первых, система функций Мерсенна — Уолша, как и классическая система Уолша, является двухуровневой, но отличается от нее меньшим по модулю значением $-b$. При этом она является достаточно близкой аппроксимацией системы Уолша на нечетных порядках.

Во-вторых, система функций Мерсенна — Уолша отличается от классической меньшим на единицу числом порождающих ее элементов столбцов и, соответственно, для вычисления она проще классической.

В-третьих, любой базис отличает предпочтительная область его применения. В составе системы функций Мерсенна — Уолша нет константы — функции нулевой частоты. Следовательно, такая система предпочтительнее при построении полосовых фильтров при обработке сигналов и изображений [20]. Получить такую систему путем простого удаления каймы матрицы Адамара — Уолша не получится — будет нарушена ортогональность столбцов.

Модульно двухуровневые структурированные квазиортогональные матрицы. Двухуровневая реализация матриц Мерсенна была выбрана по образцу матриц Адамара из соображений эффективности выполнения преобразований с ними.

Квадратичное матричное уравнение (3) изначально предполагает наличие четырех значений $\{a, -a, b, -b\}$, однако их два по модулю. Следовательно, матрица Мерсенна может быть представлена как четырехуровневая, оставаясь, однако, модульно двухуровневой.

Определение 3. Портретом модульно двухуровневых матриц будем называть графическое изображение в виде совокупности полей двух оттенков: поля желтого оттенка соответствуют положительным значениям элементов a и b , а поля синего оттенка — их отрицательным значениям.

Требования по дизайну матриц Мерсенна, как и в [7], должны быть выполнены, и количество отрицательных элементов должно быть на один больше элементов положительных. Однако в отличие от двухуровневых матриц Мерсенна, структурированных по Уолшу, модульно двухуровневые матрицы строочно содержат элементы, соответствующие переключениям, начиная с высоких частот. Такие матрицы можно получить как результат умножения

двухуровневой матрицы Мерсенна — Уолша на матрицу порядка 31 с элементами 1 и -1, расположенными в шахматном порядке (рис. 4).

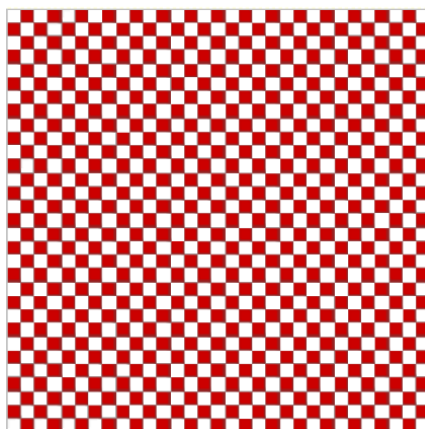


Рис. 4

На рис. 5 представлены модульно двухуровневые матрицы Мерсенна начальных порядков 7, 15 и 31, структурированные по Уолшу.

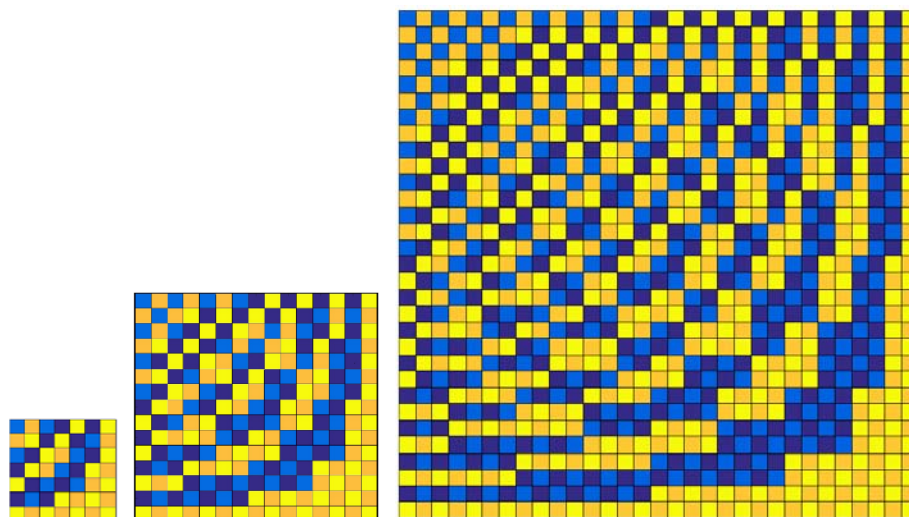


Рис. 5

Система функций, построенная с помощью модульно двухуровневой матрицы Мерсенна — Уолша, имеет вдвое больше уровней, чем система функций, построенная с помощью двухуровневой матрицы Мерсенна, структурированной по Уолшу.

Впервые модульно двухуровневая матрица Мерсенна — Уолша порядка 7 была представлена в [20]. В работе [21] впервые были показаны ее преимущества по сравнению с матрицей дискретного косинусного преобразования в алгоритме сжатия JPEG, а в работах [6, 22] — преимущества при обработке и маскировании изображений. Результатами дальнейших исследований в этой области являются вычисленные аналогичные матрицы порядков 63, 255 и выше и преобразования с ними.

Качество маскирования с использованием матриц, структурированных по Уолшу. В защитном маскировании, ориентированном на разрушение изображения на передающей стороне канала связи и восстановлении на приемной, используются структурированные квазиортогональные матрицы [6]. Само преобразование можно представить следующим образом [23]:

— на передающей стороне осуществляется последовательно преобразование $n \times n$ фрагментов изображения, равных маскирующей матрице, в виде

$$\mathbf{Y}_n^l = \mathbf{M}_n^T \mathbf{X}_n^l \mathbf{M}_n; \quad (4)$$

— на приемной стороне — обратное преобразование $n \times n$ фрагментов в виде

$$\mathbf{X}_n^l = (\mathbf{M}_n^T)^{-1} \mathbf{Y}_n^l \mathbf{M}_n^{-1}. \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{M}_n$ — маскирующая матрица, $\mathbf{Y}_n^l$ — передаваемый в канале маскированный по выражению (4) l -й фрагмент изображения. Таким образом, демаскированное изображение является итогом дефрагментации из всех l -х фрагментов принятого изображения вида $\mathbf{X}_n^l$.

Использование для маскирования ортогональных матриц $\mathbf{M}_n$, для которых $\mathbf{M}_n^{-1} = \mathbf{M}_n^T$, упрощает обратное преобразование по (5) до вида $\mathbf{X}_n^l = \mathbf{M}_n \mathbf{Y}_n^l \mathbf{M}_n^T$. Преобразования по (4) и (5) вносят только инструментальную погрешность умножения целочисленных значений на вещественные коэффициенты матриц $\mathbf{M}_n$ и $\mathbf{M}_n^T$, сводимую в современных вычислителях к нулю. Поэтому восстановленное на приемной стороне изображение соответствует исходному.

При умножении изображения в градациях серого на матрицу Адамара, являющуюся минимаксной, наблюдается „сглаживающий“ эффект в отношении яркостей пикселей. При двустороннем умножении эффект усиливается.

Пример. Для сравнения свойств двухуровневых и модульно двухуровневых матриц при маскировании изображений используем тестовый пример — изображение Lena.jpg [24], переведенное в 8-битный формат.

На рис. 6 представлены 8-битное изображение „Лена“ с разрешением 511×511 и гистограмма распределения яркостей его 261 121 пиксела.

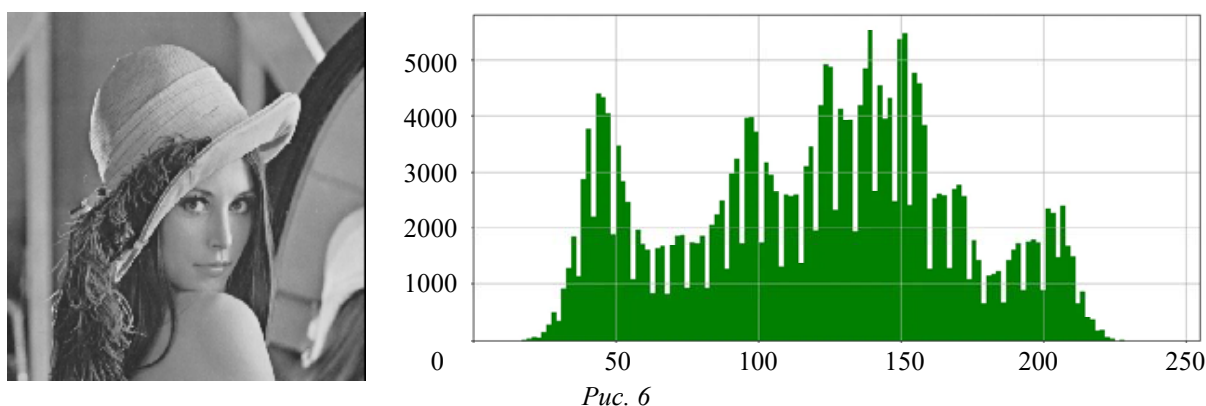


Рис. 6

На рис. 7 приведены изображения „Лена“, маскированные с использованием модульно двухуровневой (а) и двухуровневой (б) матриц Мерсенна — Уолша порядка 15 и матрицы Адамара — Уолша порядка 16 (в), а на рис. 8, а—в — соответствующие им гистограммы яркостей пикселей.

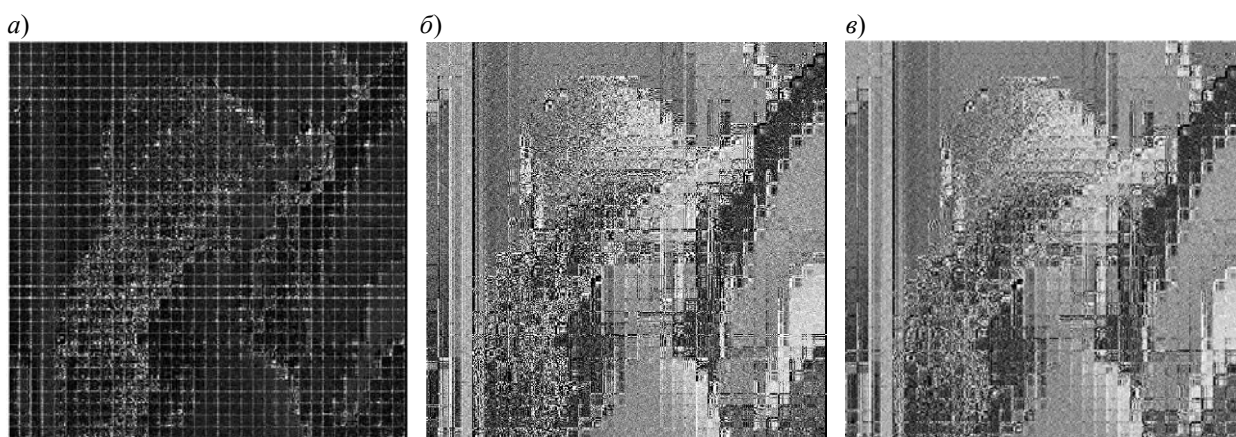


Рис. 7

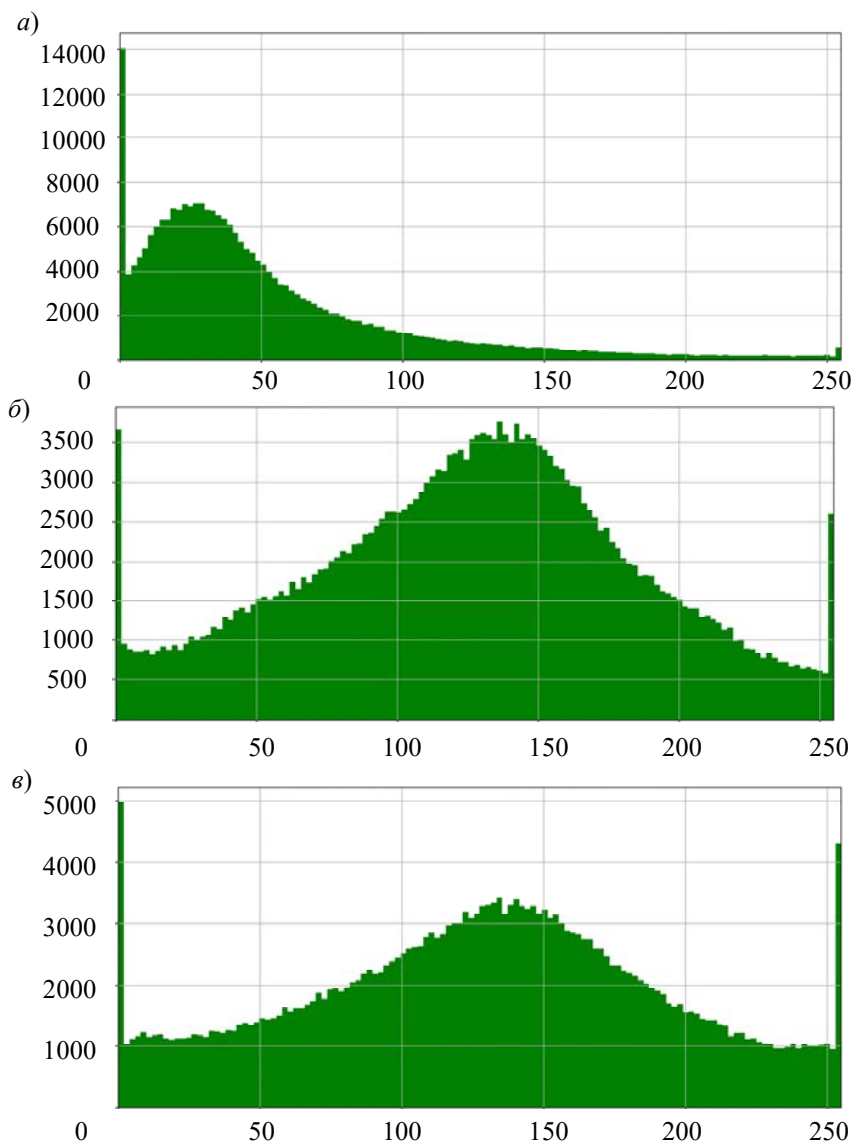


Рис. 8

Вычислительный эксперимент с использованием высокоуровневого языка программирования Python показал, что этот результат качественно воспроизводим при маскировании более 700 черно-белых изображений из библиотеки фотографий, собранных в сети Интернет и приведенных к 8-битному представлению. Как видно из рис. 8, гистограммы значений яркостей пикселей при маскировании упорядочиваются. Для модульно двухуровневой матрицы Мерсенна — Уолша (рис. 8, а) в гистограмме пик распределения смещен влево. Хотя изображение разрушено лучше, однако контуры объекта на нем („Лена“) просматриваются и, очевидно, для ряда применений такой результат не является удовлетворительным.

Эксперименты с маскирующими матрицами различных порядков показали, что качество разрушения изображения при их увеличении возрастает вне зависимости от количества уровней в матрице Мерсенна — Уолша. В большей степени на качество разрушения изображения влияет именно порядок используемой матрицы.

Так, на рис. 9 приведено изображение „Лена“, маскированное модульно двухуровневой матрицей Мерсенна — Уолша порядка 511, с еще более упорядочивающим гистограмму эффектом и качественным сокрытием исходного изображения.

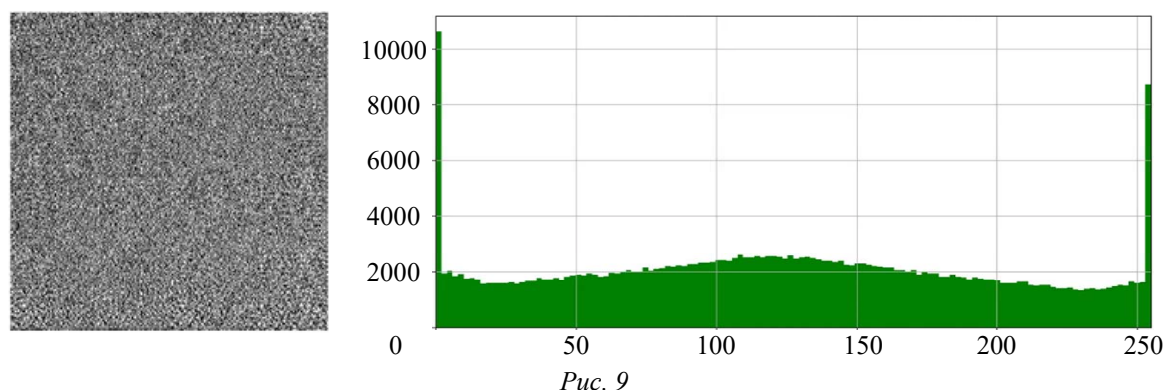


Рис. 9

Как показывает практика, сегодня не существует метрик, способных дать объективную характеристику качества разрушения изображения при маскировании. Даже при больших значениях среднеквадратической ошибки (СКО) между матрицей исходного и маскированного изображений не учитываются визуально различимые фрагменты, контуры объектов, изменения контраста и другие детали, остающиеся на изображении после маскирования. Примером могут служить изображения, приведенные на рис. 7. Однако хорошо маскированное изображение обязательно имеет большое значение СКО. Так, для исходного изображения „Лена“ и маскированного модульно двухуровневой матрицей Мерсенна — Уолша порядка 511, приведенного на рис. 9, значение СКО равно $2,4 \times 10^3$.

Заключение. Квазиортогональные матрицы Мерсенна, структурированные по Уолшу, имеют два вида: двухуровневые и модульно двухуровневые. Оба варианта матриц обладают важными для обработки и преобразования изображений свойствами упорядочения элементов в виде системы функций.

По сравнению с двухуровневыми матрицами Мерсенна — Уолша модульно двухуровневые имеют для маскирования лучшие перспективы по качеству разрушения изображения при равных порядках.

Наибольшее влияние на качество разрушения изображения при маскировании имеет порядок маскирующей матрицы Мерсенна — Уолша.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Horadam K. J. Hadamard matrices and their applications. Princeton Univ. Press, 2007. 263 p.
2. Seberry J., Yamada M. Hadamard Matrices: Constructions using number theory and linear algebra. Wiley, 2020. 384 p.
3. Mironovsky L. A., Slaev V. A. Strip-Method for Image and Signal Transformation. Berlin, Boston: De Gruyter, 2011. DOI: 10.1515/9783110252569.
4. Wang R. Introduction to Orthogonal Transforms with Applications in Data Processing and Analysis. Cambridge Univ. Press, 2010. 504 p.
5. Turyn R. J. Hadamard matrices, Baumert-Hall units, four symbol sequences, pulse compression, and surface wave encodings // Journal of Combinatorial Theory. Ser. A. 1974. Vol. 16. P. 313—333.
6. Vostrikov A., Sergeev M. Expansion of the Quasi-Orthogonal Basis to Mask Images // Smart Innovation, Systems and Technologies – 2015. Vol. 40. P. 161—168. DOI: 10.1007/978-3-319-19830-9_15.
7. Seberry J. Hadamard designs // Bulletin of the Australian Mathematical Society. 1970. N 2. P. 45—54.
8. Evangelaras H., Koukouvinos C., Seberry J. Applications of Hadamard matrices // Journal of Telecommunications and Information Technology. 2003. Vol. 2. P. 3—10.
9. Сергеев А. М., Востриков А. А. Специальные матрицы: вычисление и применение. СПб: Политехника, 2018. 112 с.
10. Балонин Н. А., Сергеев М. Б. Специальные матрицы: псевдообратные, ортогональные, адамаровы и критские. СПб: Политехника, 2019. 196 с. DOI: 10.25960/7325-1155-0.

11. Сергеев А. М. Обоснование перехода гипотезы Адамара в теорему // Изв. вузов. Приборостроение. 2021. Т. 64, № 2. С. 90—96.
12. Jenny suggested this idea a year ago at an International Meeting on Hadamard Matrices [Электронный ресурс]: <http://mathscinet.ru/catalogue/files/Judy-AnneOsborne_JennysIdea_VisHadamard.pdf>, 28.07.2022.
13. Portraits of Orthogonal Matrices as a Base for Discrete Textile Ornament Patterns / A. Sergeev, M. Sergeev, A. Vostrikov, D. Kurtyanik // Smart Innovation, Systems and Technologies. 2019. Vol. 143. P. 135—143. DOI: 10.1007/978-981-13-8303-8_12.
14. Балонин Н. А., Сергеев М. Б. Вычисление матриц Мерсенна методом Пэли. // Изв. вузов. Приборостроение. 2014. Т. 57, № 10. С. 38—41.
15. Use of symmetric Hadamard and Mersenne matrices in digital image processing / A. Vostrikov, M. Sergeev, N. Balonin, A. Sergeev // Proc. Computer Science. 2018. Vol. 126. P. 1054—1061. DOI: 10.1016/j.procs.2018.08.042.
16. Rademacher H. Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen // Mathematische Annalen. 1922. Vol. 87, N 1—2. P. 112—138.
17. Harmuth H. F. Applications of Walsh Functions in Communications // IEEE Spectrum. 1969. Vol. 6. P. 82—91.
18. Walsh J. L. A closed set of normal orthogonal functions // American Journal of Mathematics. 1923. Vol. 45. P. 5—24.
19. Вычисление матриц Мерсенна — Уолша / Н. А. Балонин, Ю. Н. Балонин, А. А. Востриков, М. Б. Сергеев // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2014. № 11 (125). С. 51—56. DOI: 10.14489/vkit.2014.011.pp.051—056.
20. Mersenne—Walsh Matrices [Электронный ресурс]: <<http://mathscinet.ru/catalogue/walsh/>>, 04.08.2022.
21. Kapranova E. A., Nenashev V. A., Sergeev M. B. Compression and Coding of Images for Satellite Systems of Earth Remote Sensing Based on Quasi-Orthogonal Matrices // Proc. of SPIE. Image and Signal Processing for Remote Sensing XXIV. 2018. P. 1078923. DOI:10.1117/12.2324249.
22. Balonin N., Vostrikov A., Sergeev M. Mersenne-Walsh Matrices for Image Processing // Smart Innovation, Systems and Technologies. 2015. Vol. 40. P. 141—147. DOI: 10.1007/978-3-319-19830-9_13.
23. Сергеев А. М. Методы преобразования изображений и кодирования сигналов в каналах распределенных систем на основе использования специальных квазиортогональных матриц: автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб, 2019. 153 с.
24. The Lenna Story [Электронный ресурс]: <<http://lenna.org/>>, 04.08.2022.

Сведения об авторе

Александр Михайлович Сергеев

— канд. техн. наук; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра вычислительных систем и сетей; доцент; E-mail: aleks.asklab@gmail.com

Поступила в редакцию 28.11.2022; одобрена после рецензирования 22.12.2022; принята к публикации 20.03.2023.

REFERENCES

1. Horadam K.J. *Hadamard matrices and their applications*, Princeton University Press, 2007, 263 p.
2. Seberry J., Yamada M. *Hadamard Matrices: Constructions using number theory and linear algebra*, Wiley, 2020, 384 p.
3. Mironovsky L.A., Slaev V.A. *Strip-Method for Image and Signal Transformation*, Berlin, Boston, De Gruyter, 2011, <https://doi.org/10.1515/9783110252569>.
4. Wang R. *Introduction to Orthogonal Transforms with Applications in Data Processing and Analysis*, Cambridge University Press, 2010, 504 p.
5. Turyn R.J. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 1974, vol. 16, pp. 313—333.
6. Vostrikov A., Sergeev M. *Smart Innovation, Systems and Technologies*, 2015, vol. 40, pp. 161—168, DOI: 10.1007/978-3-319-19830-9_15.
7. Seberry J. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 1970, no. 2, pp. 45—54.
8. Evangelaras H., Koukouvinos C., Seberry J. *Journal of Telecommunications and Information Technology*, 2003, vol. 2, pp. 3—10.
9. Sergeev A.M., Vostrikov A.A. *Spetsial'nyye matritsy: vychisleniye i primeneniye* (Special Matrices: Calculation and Application), St. Petersburg, 2018, 112 p. (in Russ.)
10. Balonin N.A., Sergeev M.B. *Spetsial'nyye matritsy: psevdootratnyye, ortogonal'nyye, adamarovy i kritskiye* (Special Matrices: Pseudoinverse, Orthogonal, Hadamard and Cretan), St. Petersburg, 2019, 196 p., DOI: 10.25960/7325-1155-0.

11. Sergeev A.M. *Journal of Instrument Engineering*, 2021, no. 2(64), pp. 90–96. (in Russ.)
12. *Jenny suggested this idea a year ago at an International meeting on Hadamard Matrices*, http://mathscinet.ru/catalogue/files/Judy-AnneOsborne_JennysIdea_VisHadamard.pdf.
13. Sergeev A., Sergeev M., Vostrikov A., Kurtyanik D. *Smart Innovation, Systems and Technologies*, 2019, vol. 143, pp. 135–143, DOI: 10.1007/978-981-13-8303-8_12.
14. Balonin N.A., Sergeev M.B. *Journal of Instrument Engineering*, 2014, no. 10(57), pp. 38–41. (in Russ.)
15. Vostrikov A., Sergeev M., Balonin N., Sergeev A. *Procedia Computer Science*, 2018, vol. 126, pp. 1054–1061, DOI: 10.1016/j.procs.2018.08.042.
16. Rademacher H. *Mathematische Annalen*, 1922, no. 1–2(87), pp. 112–138.
17. Harmuth H.F. *IEEE Spectrum*, 1969, vol. 6, pp. 82–91.
18. Walsh J.L. *American Journal of Mathematics*, 1923, vol. 45, pp. 5–24.
19. Balonin N.A., Vostrikov A.A., Sergeev M.B. *Vestnik komp'yuternykh i informatsionnykh tekhnologii* (Herald of Computer and Information Technologies), 2014, no. 11(125), pp. 51–56, DOI: 10.14489/vkit.2014.011.pp.051-056. (in Russ.)
20. *Mersenne-Walsh Matrices*, <http://mathscinet.ru/catalogue/walsh/>.
21. Kapranova E.A., Nenashev V.A., Sergeev M.B. *Proceedings of SPIE – The International Society for Optical Engineering, "Image and Signal Processing for Remote Sensing XXIV"*, 2018, pp. 1078923, DOI:10.1117/12.2324249.
22. Balonin N., Vostrikov A., Sergeev M. *Smart Innovation, Systems and Technologies*, 2015, vol. 40, pp. 141–147, DOI: 10.1007/978-3-319-19830-9_13.
23. Sergeev A.M. *Metody preobrazovaniya izobrazheniy i kodirovaniya signalov v kanalakh raspredelennykh sistem na osnove ispol'zovaniya spetsial'nykh kvaziortogonal'nykh matrits* (Methods for Image Transformation and Signal Coding in Channels of Distributed Systems Based on the Use of Special Quasi-Orthogonal Matrices), Candidate's Thesis, St. Petersburg, 2019, 153 p. (in Russ.)
24. *The Lenna Story*, <http://lenna.org/>.

Data on author

Aleksander M. Sergeev — PhD; St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Department of Computer Systems and Network; Associate Professor;
E-mail: aleks.asklab@gmail.com

Received 28.11.2022; approved after reviewing 22.12.2022; accepted for publication 20.03.2023.

НАДЕЖНОСТЬ ДВУХОСЕВЫХ СКАНИРУЮЩИХ ГОЛОВОК,
ПРИМЕНЯЕМЫХ В АДДИТИВНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ

Ю. И. ШАНИН*, И. С. ШАРАПОВ

*Научно-исследовательский институт Научно-производственное объединение „ЛУЧ“,
Подольск, Россия
ShaninYul@sialuch.ru

Аннотация. Представлена двухосевая сканирующая система („сканатор“), предназначенная для использования в аддитивном производстве и осуществления селективного лазерного плавления металлических порошков. Сканатор состоит из трех самостоятельных узлов — коллиматора, сканирующей головки и F-theta-объектива, соединенных между собой. Цель работы — расчетно-экспериментальное обоснование принимаемых основных технических решений с точки зрения обеспечения надежности сканатора на этапе разработки конструкции и выпуска рабочей конструкторской документации. В соответствии со стандартами по надежности проведен анализ схемного решения и требований по надежности, рассмотрены причины возможных отказов и предельных состояний сканатора в процессе работы, представлены расчеты в обоснование работоспособности сканатора как в процессе эксплуатации, так и в условиях хранения и транспортирования. Приведены результаты тепловых расчетов коллиматора, сканирующей головки и F-theta-объектива. Описано влияние на оптические узлы конструкции низких (при хранении) и высоких (при эксплуатации) температур. Для сканирующих зеркал, установленных в сканирующей головке и подвергающихся воздействию больших угловых ускорений, выполнены прочностные расчеты, в том числе методом конечных элементов с применением программного обеспечения ANSYS. По результатам работы обоснована надежность элементов и сканатора в целом. Предложена методика расчета надежности сканатора. Изложены меры, рекомендованные для внесения изменений в конструкцию с целью повышения ее надежности. Выработанные рекомендации были реализованы в процессе изготовления опытного образца сканатора.

Ключевые слова: сканирующая головка, сканатор, сканирующее зеркало, гальвомотор, датчик угла поворота, надежность, показатели надежности

Благодарности: работа выполнена в рамках договора от 26.12.2019 № 793/121-Д между ООО „РусАТ“ и НИИ НПО „ЛУЧ“: „Создание двухосевого сканатора для селективного лазерного плавления“.

Ссылка для цитирования: Шанин Ю. И., Шарапов И. С. Надежность двухосевых сканирующих головок, применяемых в аддитивном производстве // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 5. С. 409—422. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-409-422.

RELIABILITY OF DUAL-AXIS SCANNING HEADS USED IN ADDITIVE MANUFACTURING

Yu. I. Shanin*, I. S. Sharapov

*Scientific Production Association „LUCH“,
Podolsk, Russia
ShaninYul@sialuch.ru

Abstract. A dual-axis scanning system ("scanner") intended for use in additive production and selective laser melting of metal powders is presented. The scanner consists of three independent nodes - a collimator, a scanning head and an F-theta lens, connected to each other. The purpose of the work was a brief review and calculation and experimental justification of the main technical solutions taken in terms of ensuring the reliability of the scanner at the stage of

design development and issuance of working design documentation. In accordance with GOSTs for reliability, analysis of the circuit design and reliability requirements is carried out, causes of possible failures of the scanner during operation and possible limit states in its operation are considered, calculations are presented to substantiate the health of the scanner both during operation and in storage and transportation conditions. Thermal calculations of the collimator, scanning head, and F-theta lens are carried out. The influence of low (during storage) and high (during operation) temperatures on optical components of the design is also considered. Strength calculations, including those based on the finite element method using the ANSYS software, are performed for scanning mirrors installed in the scanning head and subjected to high angular accelerations. Results of the study testify the reliability of the elements and the scanner as a whole. A method for calculating the reliability of the scanner is proposed. Measures recommended for making changes to the design in order to increase its reliability are outlined. The developed recommendations are implemented in the process of a prototype scanner manufacturing.

Keywords: scanning head, scanner, scanning mirror, galvo, rotation angle sensor, reliability, reliability indicators

Acknowledgments: the work was performed within the framework of the contract dated December 26, 2019 No. 793/121-D between LLC RusAT and RDI SPA "LUCH": "Creation of a dual-axis scanner for selective laser melting".

For citation: Shanin Yu. I., Sharapov I. S. Reliability of dual-axis scanning heads used in additive manufacturing. *Journal of Instrument Engineering*. 2023. Vol. 66, N 5. P. 409—422 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-409-422.

Введение. В мире архитектура построения двухосевого сканатора хорошо отработана и апробирована на практике [1, 2] в течение более чем 25 лет. Многие зарубежные фирмы (Cambridge Technology Inc. [3], ScanLAB GmbH. [4], Raylase GmbH. [5], Sino-Galvo (Beijing) Technology Co., Ltd [6] и пр.) изготавливают линейки сканирующих головок для различных применений. Широкое использование они нашли, прежде всего, в маркировке, гравировке и других процессах поверхностной обработки. Специфические условия процесса селективного лазерного плавления обуславливают ряд дополнительных требований к элементам сканирующей головки [1, 2].

Состав сканатора можно рассматривать как три самостоятельных узла: коллиматор, сканирующая головка и F-theta-объектив. Коллиматор, расположенный между QВН-разъемом волоконного лазера и сканирующей головкой, обеспечивает расширение потока входного лазерного излучения и формирование на выходе параллельного пучка заданной апертуры. В корпусе сканирующей головки смонтированы два электрических двигателя (гальвомотора) с установленными на них сканирующими зеркалами. Гальвомоторы обеспечивают возможность кругового качания зеркал в двух взаимно перпендикулярных направлениях в пределах небольшого угла $\pm\theta$, тем самым изменяя направление оси пучка. Датчик угла поворота, устанавливаемый на одном из концов вала ротора гальвомотора, служит для выработки сигнала управления мотором и точного позиционирования сфокусированного пучка на рабочем поле. Также обычной практикой является установка в сканирующей головке плат сопряжения и управления гальвомоторами и лазером. Отметим, что электронные компоненты сканатора (блок питания и драйверы гальвомоторов, устройство сопряжения интерфейсов) в течение срока службы испытывают нагрузку в виде большого количества включений и выключений. Как правило, F-theta-объектив присоединяется к сканирующей головке с помощью резьбового соединения и служит фокусировке отклоняемого лазерного пучка в нужной точке плоского квадратного рабочего поля.

В современной литературе и разработках ведущих зарубежных фирм по сканирующим системам [1—6] вопросы надежности (reliability, dependability) сканаторов не обсуждаются, они подлежат разработке. Вместе с тем теория надежности технических систем [7] и электрических машин [8, 9] достаточно хорошо разработана. Задача построения расчетной модели надежности сканатора заключается в идентификации объекта, определении отказов, выборе методов расчета, адекватных особенностям узлов сканатора, уточнении возможности применения комплексных показателей надежности, получении и подтверждении исходных данных для расчета показателей надежности.

На основе анализа литературных данных [1, 2, 7—9] установлено, что наименее надежным в сканаторе является электромеханическое устройство — гальвомотор, так как он подвержен циклическим переменным электромеханическим нагрузкам. При определении этих нагрузок (в частности, амплитуды изменения возникающих механических напряжений в элементах и соединениях, количества циклов и пр.) использовались расчетные методы.

В настоящей статье расчетно-экспериментальными методами исследована надежность узлов и сканатора в целом. Для оценки степени воздействия тепловых и динамических нагрузок на конструкцию сканатора проведены тепловые и прочностные расчеты, подтверждающие работоспособность системы как при воздействии лазерного излучения, так и при низких и высоких температурах эксплуатации и воздействии синусоидальной вибрации, ударных нагрузок и больших угловых ускорений (для сканирующих зеркал).

Данное решение является одной из пионерских разработок в Российской Федерации в указанной области применения и направлено на импортозамещение.

Анализ схемного решения сканатора и требований по надежности. Двухосевая оптическая сканирующая система (сканатор) входит в состав аддитивного оборудования и служит для 3D печати изделий из металлических порошков по технологии селективного лазерного плавления.

Принцип действия двухосевого сканатора и схема его использования представлены на рис. 1, а, б соответственно.

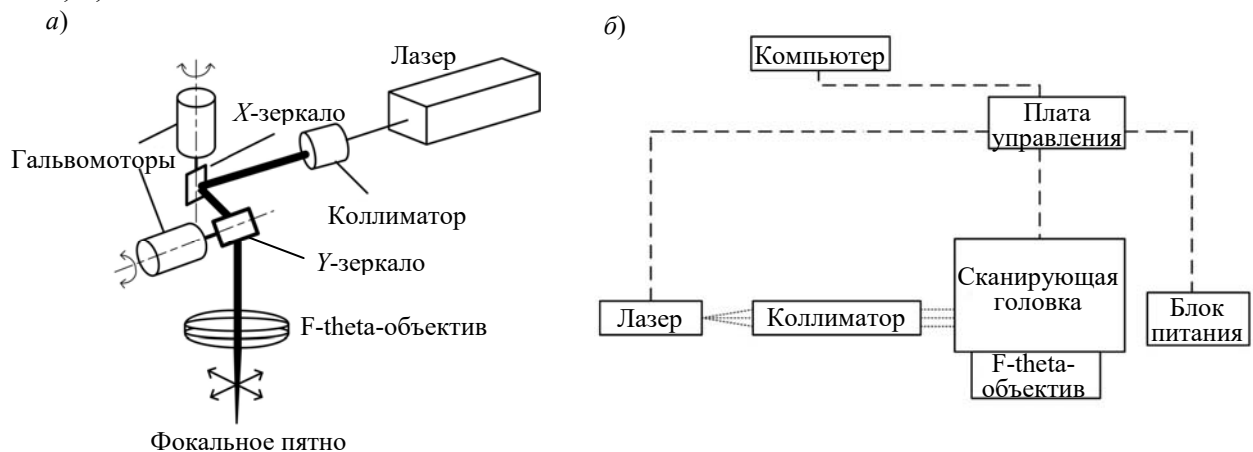


Рис. 1

Оптическое волокно иттербиевого лазера номинальной мощностью 700 Вт с длиной волны 1080 ± 1 нм сопрягается с входом коллиматора через QВН-разъем, обеспечивающий соосность разъема и оптической оси коллиматора. Пучок лазерного излучения, выходящего из волокна, расширяется под углом $4,01^\circ$ к оптической оси в переходнике и попадает в трехлинзовый коллиматор, на выходе из которого расчетный диаметр параллельного пучка составляет 15 мм. Линзы изготовлены из кварцевого стекла и имеют на оптических поверхностях просветляющее покрытие, обеспечивающее прохождение через каждую линзу 99,6 % мощности излучения. Линзы выставлены друг относительно друга с помощью дистанционных колец. Внешний корпус коллиматора может охлаждаться либо воздухом, либо водой. Выход коллиматора через адаптер состыковывается с входным отверстием сканирующей головки. Сначала лазерный пучок попадает на сканирующее зеркало, изменяющее его направление по оси X , и далее — на сканирующее зеркало, изменяющее его направление по оси Y . Установленные в оправки зеркала крепятся к вращающемуся валу электродвигателя постоянного тока — гальвомотору. Колебание вала обеспечивается подачей возбуждающего знакопеременного напряжения на электрическую обмотку неподвижного статора. На другом конце вала расположен оптический датчик угла поворота. В нем в процессе движения вала вырабатывается пропорциональный углу поворота сигнал, который подается в регулятор (контроллер), обеспечивающий

работу системы автоматического регулирования с обратной связью. Фокусирующая система предназначена для фокусировки отклоненного сканирующими зеркалами лазерного пучка. В качестве фокусирующей системы используется четырехлинзовый F-theta-объектив. Задача зеркал — направить пучок в нужное место рабочего поля, задача объектива — получить в этом месте сфокусированное пятно определенного размера и формы. Система управления сканатором предназначена для управления с помощью контроллеров и устройства сопряжения работой двух гальвомоторов и лазера в автоматическом режиме посредством управляющей программы.

На этапе разработки рабочей конструкторской документации оценки показателей надежности сканатора должны быть проведены расчетными методами по ГОСТ 27.301-95.

Требования к надежности. Ресурс оборудования должен составлять не менее 8700 ч, срок службы оборудования — не менее 5 лет. В предположении о 250 рабочих днях в году для выработки ресурса до отказа за время срока службы оборудование должно работать ~7 ч/сутки. Вероятность безотказной работы оборудования — не менее 0,9 в течение ресурса. Оборудование техническому обслуживанию и ремонту не подлежит. Восстановление работоспособности оборудования после возникновения отказа осуществляется путем замены функциональных блоков на предприятии-изготовителе. Назначенный срок хранения оборудования не менее 5 лет в упаковке предприятия-изготовителя в складских отапливаемых помещениях. По требованиям, оборудование должно быть стойким как к воздействию предельно низкой температуры -20°C , так и к воздействию предельно повышенной температуры $+50^{\circ}\text{C}$. Также необходимо оценить прочностную стойкость оборудования к действию:

- синусоидальной вибрации с амплитудой ускорения 50 м/с^2 (5g) в диапазоне частот от 10 до 500 Гц в течение 30 ч суммарно по каждому из трех направлений;

- многократных ударов при транспортировании в упаковке.

На основе ГОСТ 27.003-90 была проведена классификация сканатора (вследствие формального характера результаты классификации здесь не приведены).

Отказы и предельные состояния. Расчеты в обоснование работоспособности. В соответствии с функциями, выполняемыми оптическими деталями сканатора, отказ оптической детали заключается в следующем:

- отклонении значений радиусов ближайших сфер за пределы допусков на изготовление;

- отклонении значений шероховатости оптических поверхностей от требований конструкторской документации;

- нарушении просветляющего покрытия линз и недопустимом уменьшении отражения от оптических поверхностей зеркал;

- превышении пределов прочности и деформаций при лазерном нагружении и пониженных/повышенных температурах хранения и эксплуатации;

- смещении оптических осей в процессе сборки коллиматора и объектива.

В гальвомоторе возможны отказы в обмотке статора, во вращающихся деталях ротора (шарикоподшипники, узлы зеркала и датчика угла поворота) и отказы (или нарушение нормального функционирования) датчиков, связанные с излишним разогревом конструкции.

Типичными критериями достижения предельных состояний деталей сканатора могут быть:

- отказ одной или нескольких составных частей;

- механический износ ответственных деталей (узлов);

- снижение наработки на отказ.

Структурная схема надежности узлов сканатора является последовательной. Соответственно, отказ любого из его элементов может привести к отказу сканатора.

На основе анализа видов, последствий и критичности отказов (согласно ГОСТ 27.310-95) главной угрозой для сканатора является потеря возможностей выполнять вообще или правильно рабочий процесс — быстро доставлять в заданную точку рабочего поля необходимую энергию с заданной точностью позиционирования сфокусированного пятна. Были выделены две группы отказов сканатора:

- 1) отказы, которые могут приводить к частичной потере работоспособности из-за возможных тепловых и динамических перегрузок в его узлах и элементах;
- 2) отказы, приводящие к полной потере работоспособности из-за проблем с гальвомоторами.

Последовательно рассмотрены возможные причины отказов и расчетно оценена степень их влияния на работоспособность сканатора.

Тепловые расчеты. Тепловое состояние узлов сканатора может оказывать воздействие на его работоспособность. Источниками тепловыделений в сканаторе являются лазерное излучение, проходящее через оптический тракт сканатора и частично поглощаемое в нем, и разогрев гальвомоторов, вызванный омическим нагревом статорных катушек при прохождении по электрическим проводам рабочего тока. Сильный перегрев оптических элементов относительно температуры окружающей среды может приводить к появлению термодформаций и оптических аберраций, вызываемых изменениями температурного состояния как оптических элементов, так и элементов конструкции. Различие в коэффициентах линейного расширения оптических и конструкционных материалов сканатора может сказываться на изменении оптических характеристик узлов и деталей при изменениях их температуры. Уровни тепловых нагрузок, возникающих при работе лазера и мотора, были оценены в различных узлах сканатора. Также рассмотрено теплонпряженное состояние оптических узлов коллиматора и F-theta-объектива при воздействии на них пониженных и повышенных температур, характерных как для условий хранения сканатора, так и его работы.

С учетом мощности передаваемой энергии детали конструкции коллиматора цилиндрической формы с внешним диаметром 40 мм и длиной 38 мм могут поглощать от 47,5 до 107,5 Вт мощности излучения, попадающего на оправы линз. Расчеты показывают, что охлаждения коллиматора естественной конвекцией окружающим воздухом недостаточно. Поперечное и продольное оребрение помогает развить теплообменную поверхность. Согласно проведенным расчетам установлено, что в случае поглощенной в коллиматоре мощности, равной 47,5 Вт, может быть использовано оребрение с поперечными ребрами (шаг $t_p=5$ мм, толщина ребра $\delta_p=2$ мм, число ребер $N_p=14$, высота ребра $h_p=25$ мм, коэффициент развития поверхности $K_f=17,3$, средний коэффициент теплоотдачи $\alpha=7$ Вт/(м²·К)) и с продольными ребрами ($N_p=30$, $h_p=35$ мм, $K_f=19,8$, $\alpha=7$ Вт/(м²·К)). Но если тепловыделение в коллиматоре составляет порядка 107,5 Вт, то естественного охлаждения оребренной поверхности не хватает и надо рассматривать принудительное охлаждение.

Анализ случая вынужденного воздушного охлаждения оребренной внешней поверхности коллиматора ($t_p=7$ мм, $\delta_p=3$ мм, $N_p=5$, $K_f=12$) показал, что при снятии 47,5 Вт перегрев конструкции составит 31,8 °С, а при снятии 107,5 Вт — 71,5 °С. При принудительном водяном охлаждении коллиматора с помощью прокачки воды через рубашку охлаждения в кольцевом канале рубашки охлаждения высотой 2 мм и шириной 23 мм и скорости протекающей воды $w_b=0,1$ м/с реализуется ламинарный режим течения (число Рейнольдса $Re=470$) и коэффициент поверхностной теплоотдачи $\alpha_p=1,25 \cdot 10^3$ Вт/(м²·К). При этом расчетный температурный напор между нагретой стенкой и жидкостью для самого напряженного случая составит 32,7 °С. При надлежащем увеличении диаметра линз в коллиматоре можно избежать попадания излучения на оправы, при этом принудительное охлаждение коллиматора может рассматриваться как дополнительная опция, подключаемая при необходимости.

В сканирующей головке находятся два гальвомотора, закрепленные в кронштейны, которые, в свою очередь, крепятся винтами к крышкам корпуса. На гальвомоторах с помощью оправок установлены сканирующие зеркала. Максимальная поглощаемая зеркалом тепловая мощность составляет 2,8 Вт. Для линз F-theta-объектива установлен уровень рассеяния (а следовательно, поглощения) $\rho_\lambda \leq 0,3$ %. На четырех линзах поглощается мощность 16,8 Вт. В предположении, что по обмотке статора гальвомотора с активным сопротивлением Θ проходит осредненный по времени ток $I_{ст}$, оценены максимально возможные потери мощности на нагрев по формуле $Q_{гм} = I_{ст}^2 \cdot \Theta$, тогда для $\Theta = 2,2$ Ом и $I_{ст} = 3,5$ А значение $Q_{гм} \approx 27$ Вт. Если не будет учитываться незначительное выделение тепла печатными платами управления и радиационный нагрев головки излучением от рабочей зоны процесса, то в объеме сканирующей головки может выделяться максимальная мощность $Q_{сг} = 2Q_3 + Q_{об} + 2Q_{гм} = 2 \cdot 2,8 + 16,8 + 2 \cdot 27 = 76,4$ Вт, где Q_3 и $Q_{об}$ — тепловыделение зеркала и F-theta-объектива соответственно.

При упрощенном рассмотрении охлаждаемая поверхность сканирующей головки представляет собой параллелепипед, имеющий две боковые вертикальные ребреные стенки, переднюю и заднюю вертикальные стенки, горизонтальные крышку и основание, изготовленные из алюминиевого сплава. Теплоотдача стенок головки рассчитывалась для естественной конвекции в большом объеме, максимальная избыточная температура стенки головки при работе не превышала $\vartheta = 26,8$ °С. При расчетах получено следующее уравнение, связывающее теплосъем $Q_{сг}$ с избыточной температурой стенки ϑ сканирующей головки:

$$\vartheta = -1,1 \cdot 10^{-3} \cdot Q_{сг}^2 + 0,427 Q_{сг} + 0,7. \quad (1)$$

По литературным данным [10—12], КПД бесколлекторных электродвигателей постоянного тока, применяемых в гальвомоторах, достаточно высок (от 70 до 90 %) в случае плавного варьирования электрической мощности электронным регулятором хода. При таком КПД тепловыделение одного гальвомотора не превысит $Q_{гм} = 2,7 \dots 8,1$ Вт, а избыточная температура головки будет находиться в диапазоне $\vartheta = 11,7 \dots 15,5$ °С.

Оценивалось также влияние пониженной и повышенной температуры на узлы, содержащие оптические детали, — коллиматор и F-theta-объектив. Изменения температуры вызывают характерное расширение или сжатие линз по отношению к материалам montiroвок как в осевом, так и в радиальном направлениях.

Коэффициент линейного расширения (КЛР) материала оправы, как правило, превышает КЛР установленной в ней оптики. В обычном случае снижение температуры приводит к тому, что опора сжимается в радиальном направлении к ободу оптического элемента. Расчеты теплонпряженного состояния линз коллиматора и объектива показали, что назначенных допусков на изготовление линз и оправ достаточно для обеспечения нормальной их работы (без возникновения радиальных напряжений) при изменении температуры в диапазоне $-20 \dots +50$ °С.

Также было проанализировано поведение оптических сборок в осевом направлении при изменении внешней температуры и воздействующих на конструкцию ускорений при синусоидальной перегрузке и ударном нагружении. Основное влияние оказывает величина усилия поджатия пружинного кольца, обеспечивающего гарантированное нераскрытие сборок как при пониженной, так и при повышенной температуре. Напряжение сжатия между дистанционным кольцом и линзой при температуре сборки (20 °С) составляет $4,75 \cdot 10^4$ Па, при пониженной температуре (-20 °С) — $7,12 \cdot 10^4$ Па. Данные напряжения являются оценками снизу (в силу явно завышенных в расчетах значений контактных площадей между дистанционным кольцом и линзой), но незначительными по сравнению с пределом прочности материала линз (кварц) на сжатие (50 МПа).

Как следует из расчетов, оптические детали и узлы сканирующей головки сохраняют свою работоспособность при действии лазерного излучения, а также и при изменении температуры окружающей среды и воздействии синусоидальных и ударных перегрузок.

Прочностные расчеты. При позиционировании сканирующие зеркала подвергаются большим угловым ускорениям. При проектировании зеркал можно использовать следующую эмпирическую формулу [1] для оценки прогиба оптической поверхности:

$$\Omega = 0,0055 \varepsilon \rho S^5 / (E H^2), \quad (2)$$

где Ω — максимальное отклонение от исходной формы зеркала; ε — угловое ускорение; S — ширина зеркала, измеренная по оси вращения; E — модуль Юнга зеркального материала; H — толщина зеркала; ρ — плотность материала зеркала.

Применение формулы (2) к X - и Y -зеркалам при их угловом ускорении $\varepsilon=4000$ рад/с² дает значения $\Omega_X=0,57$ нм и $\Omega_Y=4,03$ нм.

Анализ нагруженных состояний выполнен с помощью разностных методов путем построения конечно-элементных моделей (КЭМ). Моделирование проведено с применением программного обеспечения ANSYS (англоязычная версия 14.0.0)*. Расчеты полных деформаций для X -зеркала (рис. 2, а) и Y -зеркала (рис. 2, б), выполненные с применением КЭМ, дают величину деформации в верхних угловых зонах X - и Y -зеркал на уровне $\Omega_{X\text{КЭМ}}=3,3$ нм и $\Omega_{Y\text{КЭМ}}=12,4$ нм.

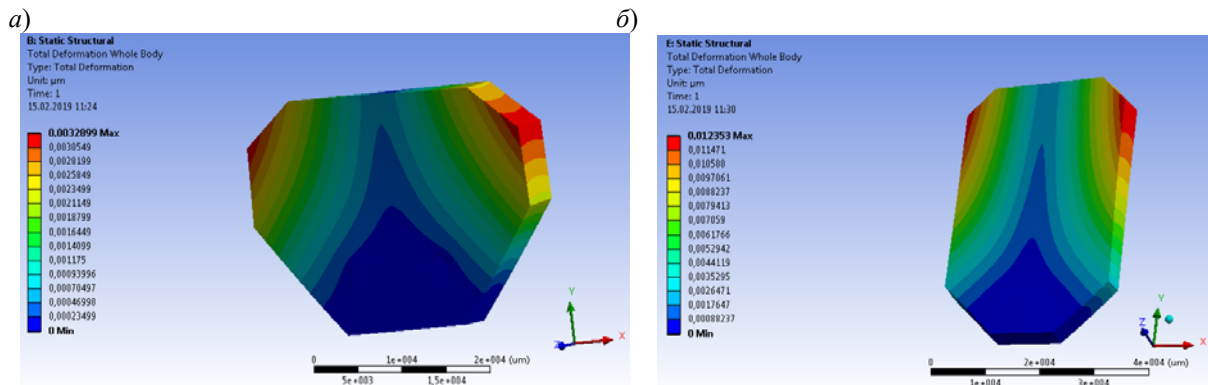


Рис. 2

Как аналитические, так и расчетные оценки показывают незначительные изменения поверхности зеркал при воздействии больших угловых ускорений.

Надежность элементов сканатора. Коллиматор (описание конструкции коллиматора приведено выше). Надежность оптических приборов достаточно высока, так как они, как правило, содержат небольшое количество подвижных элементов, работают с малыми нагрузками в относительно благоприятных условиях и режимах по сравнению, например, с механическими машинами.

Если принять, что вероятность безотказной работы оптических деталей коллиматора по времени τ равна $P_K(\tau)=0,9$, то в предположении об одинаковом вкладе в надежность каждой линзы вероятность их безотказной работы определяется как $P_{\text{л}}(\tau)=\sqrt[3]{P_K(\tau)}=0,965$. Если распределение наработки до отказа у каждой линзы является экспоненциальным $P_{\text{л}}(\tau_0)=\exp(-\lambda_i \tau_0)$ (где время наработки на отказ согласно техническому заданию $\tau_0=8700$ ч), то интенсивность отказов линз оценивается как $\lambda_{\text{л}}=4,1 \cdot 10^{-6}$ ч⁻¹.

Гальвомотор. Главным узлом сканатора являются два гальвомотора, каждый из которых состоит из самостоятельных узлов — бесконтактного электродвигателя постоянного тока [13—19], сканирующего зеркала и датчика угла поворота (ДУП). Сборка ротора гальвомотора содержит в центральной части NdFeB-магнит, который с помощью эпоксидного клея устанавливается в левую и правую части вала ротора. Вал устанавливается в статор из нержавеющей стали на двух радиально-упорных шарикоподшипниках 1106098, посаженных на вал

* Расчеты проведены науч. сотрудником Д. А. Ягнятинским, НПО „ЛУЧ“.

с натягом. Обмотка статора выполнена из медного провода в лаковой изоляции диаметром 0,3 мм, количество витков $N=75$. Сопротивление обмотки статора $\Theta_{об} \sim 2,2$ Ом, индуктивность $L_{об}=550$ мкГн. Гальвомотор в совокупности с платой управления являются исполнительными элементами контура системы автоматического управления положением зеркала. ДУП входит в контур управления, сигнал с него поступает на усилитель и далее на контроллер гальвомотора.

Надежность сканатора определяется надежностью гальвомотора, а более конкретно — надежностью электродвигателя и шарикоподшипников. Бесконтактные электродвигатели характеризуются повышенной надежностью вследствие отсутствия скользящего контакта и обмотки возбуждения [8, 9, 10—12]. Наибольшее число отказов электродвигателей приходится на обмотки и подшипниковые узлы. Отказы обмоток обусловлены короткими замыканиями между витками или на корпус, обрывом проводов или нарушением мест паяк. Повреждение подшипниковых узлов происходит вследствие механического износа подшипников, ухудшения состояния смазки, некачественной посадки подшипников на вал. Преобладающим видом износа подшипника, вызванного контактной усталостью рабочих поверхностей, является выкрашивание из них металла в виде мелких фрагментов, а также отслоение частичек металла. Более 80 % подшипников качения выходят из строя вследствие разрушений усталостного характера. Подшипники качения весьма чувствительны к перегрузкам. При увеличении нагрузки на подшипник вдвое его долговечность уменьшается примерно в десять раз. Слабая посадка подшипника на вал ведет к проворачиванию внутреннего кольца, что сопровождается контактной коррозией, износом вала, повышением температуры подшипникового узла [2].

Периодические высокочастотные непрерывные небольшие движения, обычно под углом менее 1 или 2°, вызывают быстрый катастрофический отказ, что известно как „ложная коррозия“ — бринеллирование (т.е. образование вмятин на поверхностях качения подшипников) или „коррозия при истирании“ [2].

Зависимость между суммарным расчетным ресурсом L_{ah} (временем наработки до появления признаков усталости) и эквивалентной нагрузкой M определяется выражением

$$L_{ah} = a_1 a_{23} ((C_r K_k) / M)^q (10^6 / (60 / \omega)) \quad \text{при } M \leq 0,5 C_r, \quad (3)$$

где q — показатель степени: $q=3$ для шарикоподшипников, $q=10/3$ для роликоподшипников; C_r — динамическая грузоподъемность, которую подшипник может выдержать в течение 1 млн оборотов при вероятности безотказной работы 90 %; a_1 и a_{23} — коэффициенты: коэффициент $a_1=1$ для надежности 90 % (для подшипников с гарантированным ресурсом), коэффициент a_{23} учитывает качество монтажа, условий эксплуатации и смазывания и для обычных (нормальных) условий эксплуатации для шарикоподшипников равен $a_{23}=0,7 \dots 0,8$; K_k — коэффициент, выбираемый в зависимости от класса точности подшипника: класс точности „0“ — $K_k=1,0$, „6“ — $K_k=1,05$, „5“ — $K_k=1,1$; ω — рабочая частота вращения подшипника.

Динамическая радиальная грузоподъемность радиальных и радиально-упорных шариковых подшипников вычисляется по формуле (ГОСТ 18855-2013)

$$C_r = b_m f_c (i \cos \beta)^{0,7} Z^{2/3} D_w^{1,8}, \quad (4)$$

где D_w — диаметр шарика; $b_m=1,3$; f_c — параметр, зависящий от отношения $D_w \cos \beta / D_{pw}$, D_{pw} — диаметр окружности центров набора шариков или роликов; β — номинальный угол контакта подшипника (для шарикоподшипника 1006098 угол $\beta=12^\circ$); i — число рядов шариков в подшипнике (для рассматриваемого случая $i=1$); Z — число шариков или роликов в однорядном подшипнике.

Тогда

$$C_r = 1,3 \cdot 59,3 \cdot (1 \cdot \cos 12)^{0,7} \cdot 20^{0,66} \cdot 2^{1,8} = 1944 \text{ Н},$$

$$L_{ah} = 1 \cdot 0,75 \cdot ((2000 \cdot 1,0) / 0,37)^3 \cdot (10^6 / (60 / (5,6))) = 1,1 \cdot 10^{16} \text{ ч}.$$

Полученные оценки показывают, что со стороны шарикоподшипников заданные показатели надежности обеспечиваются.

В разработанном гальвомоторе использован оптический ДУП в капсульном исполнении, т.е. изготавливаемый в единой конструкции с исполнительным механизмом. Подвижная часть датчика, закрепленная на вращающемся валу, изготовлена из текстолита диаметром 47 мм, толщиной 1,5 мм и имеет момент инерции $3,9 \cdot 10^{-7}$ кг·м² (3,9 г·см²).

Показателями безотказности ДУП являются время средней наработки на отказ (τ_0) или средней наработки до отказа ($\tau_{ср}$). Минимально допустимые значения $\tau_0(\tau_{ср})$, в часах для преобразователей определяются по формуле

$$\tau_0(\tau_{ср}) = 15B \cdot 10^3, \quad B = (1 + \sqrt{B_T}) / (3 + \sqrt{\Psi}), \quad (5)$$

где B_T — коэффициент, численно равный порядковому номеру класса точности для преобразователя ДУП от 1 до 10 ($B_T=0,5$ для преобразователей класса 001, 01); $\Psi=0$ для угловых перемещений; оценки применительно к рассматриваемым условиям дают $\tau_0(\tau_{ср})=8535$ ч.

Отказом ДУП следует считать прекращение функционирования или увеличение погрешности при нормальной температуре более чем в два раза относительно номинального значения.

Сканирующие зеркала изготовлены из монокристаллического кремния, имеют толщину 4 мм. Заявленные в конструкторской документации и реализованные на практике характеристики зеркал:

— вес: X-зеркало — 7,2 г (в сборе с оправкой 11 г), Y-зеркало — 13,5 г (в сборе с оправкой 22 г);

— момент инерции: X-зеркало — 3,92 г·см², Y-зеркало — 8,45 г·см².

Зеркала установлены в алюминиевые оправки по трем поверхностям (торец, задняя и передняя поверхности) с помощью эпоксидного клея. Зеркала имеют отражающее и защитное покрытия. Держатели с зеркалами с помощью прихватов крепятся к валу мотора винтами.

Зеркало должно быть установлено как можно ближе к передней опоре гальвомотора, чтобы снизить поперечные резонансы. Все моменты инерции относительно оси вращения должны быть сбалансированы для минимизации колебаний, вызванных угловым ускорением и возмущениями окружающей среды. Одно из последствий несовпадения зеркальных осей — ошибка позиционирования пучка, часто выражаемая как „улыбка“ или „хмурый взгляд“ [2]. Крепление зеркал зажимами обеспечивает возможность изменения их положения и возможного удаления для замены. Способы установки зеркал как одно целое с креплением и валом являются неразъемными.

В сканирующем зеркале особое внимание должно быть уделено отражательной способности, балансировке, термической и динамической деформации, монтажу. Состояние зеркала колеблющегося сканера касается той части его движения, в которой передаются оптические данные. Теплопроводность становится проблемой при использовании мощных лазеров. Основное требование к сканирующему зеркалу — минимальная масса при минимальном моменте инерции.

Согласно проведенным тепловым и прочностным расчетам (см. выше), сканирующие зеркала не теряют своей работоспособности.

Модель сканатора и оценка показателей надежности. Оптическая система сканатора, повторим, содержит четыре последовательно соединенных узла: коллиматор, X- и Y-сканирующие зеркала, F-theta-объектив. X- и Y-зеркала закреплены на валах приводящих их в действие гальвомоторов. Гальвомоторы контуров управления работают в наиболее напряженных режимах и представляют собой невосстанавливаемые объекты. Для невосстанавливаемых систем основными показателями безотказности являются: время наработки до отказа, вероятность отказа и вероятность безотказной работы, интенсивность отказа. Для электромашин

малой мощности с системой автоматического регулирования показателем является интенсивность отказов λ [8, 9]. Продолжительность работы по времени τ электромеханического устройства можно разбить на три составляющие: приработка узлов, нормальная работа, старение.

Структурная схема контура управления положением сканирующих зеркал представлена на рис. 3. Контур управления содержит: систему оптического тракта (СОТ, рассматривается лишь для общности модели), ДУП, контроллер (К), блок усилительный (БУ), ГМ_X, ГМ_Y — гальвомоторы по осям X и Y . Можно обоснованно утверждать, что с помощью принятых конструктивных решений удалось снизить удельные тепловые нагрузки на оптику до приемлемых величин, при которых ресурсный отказ оптических элементов маловероятен.

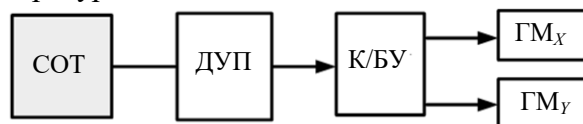


Рис. 3

Так как гальвомоторы в составе управляющего контура работают параллельно, и о взаимном влиянии элементов системы на ее надежность ничего неизвестно, то для рассмотрения можно принять модель с последовательным соединением независимых элементов [7], в которой (как упоминалось выше) отказ одного из элементов приводит к отказу всей системы. Считаем, что отказы элементов являются независимыми, т.е. отказ любой группы элементов не влияет на вероятностные характеристики остальных элементов. Для такой системы время случайной наработки до отказа $\tau_{\text{сл}}$ определяется минимальным значением случайных наработок $\tau_{\text{сл}}(i)$ ее элементов:

$$\tau_{\text{сл}} = \min_{1 \leq i \leq m} \tau_{\text{сл}}(i), \quad (6)$$

где m — число последовательных элементов (в данном случае $m = 3$).

При известных распределениях наработок до отказа отдельных независимых элементов вероятность $P_i(\tau)$ того, что объект проработает безотказно в течение заданного времени τ_0 , начав работать в момент $\tau=0$, или вероятность $P(\tau_0)$ того, что наработка до отказа окажется больше заданного времени τ_0 , определяется по формуле

$$P(\tau_0) = \prod_{i=1}^m P_i(\tau_0). \quad (7)$$

Если распределение наработки до отказа для каждого элемента является экспоненциальным $P_i(\tau_0) = \exp(-\lambda_i \tau_0)$, то показатели надежности такой системы для точных выражений определяются как [5]

$$P(\tau_0) = \exp(-\Lambda \tau_0), \quad (8)$$

а для приближенных выражений (при условии $\Lambda \tau_0 \ll 1$) — как $P(\tau_0) = 1 - \Lambda \tau_0$, где $\Lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i$,

λ_i — интенсивность отказов i -го элемента.

Надежность электронной аппаратуры (ДУП, К и БУ) гораздо выше надежности электромеханических устройств (гальвомоторы), поэтому обоснованно полагаем, что надежность системы определяется надежностью гальвомотора, а более конкретно — надежностью используемых шарикоподшипников (см. выше).

Для спроектированного гальвомотора интенсивность отказов при вероятности его безотказной работы, равной 0,9, и времени наработки до отказа $\tau_0=8700$ ч оценивается по формуле (8): $\lambda = -\ln P(\tau)/\tau_0 = -\ln(0,9)/8700 = 1,21 \cdot 10^{-5} \text{ ч}^{-1}$. По упрощенной формуле $\lambda = (1 - P(\tau))/\tau_0 = (1 - 0,9)/8700 = 1,15 \cdot 10^{-5} \text{ ч}^{-1}$. Видно, что погрешность расчета по упрощенной формуле не превышает 5 %.

Определим вероятность безотказной работы гальвомотора с дополнительными нагрузками (зеркало, датчик). Полагая вероятности безотказной работы коллиматора P_K и F-theta-объектива P_F равными: $P_K=P_F=0,995$ (при этом вероятность безотказной работы каждой из линз коллиматора и объектива должна быть на уровне 0,998—0,999), определим вероятность безотказной работы гальвомоторов $P_{ХГМ}=P_{УГМ}=P_{ГМ}=0,9535$. Полагая вероятности безотказной работы зеркала P_3 , датчика P_d и статора $P_{ст}$ равными $P_3=P_d=P_{ст}=0,995$, а постоянного магнита — $P_M=0,99$, определим вероятность безотказной работы подшипникового узла гальвомоторов $P_{п.у}=0,978$. При этом интенсивности отказов зеркала λ_3 , датчика λ_d и статора $\lambda_{ст}$ равны $\lambda_3=\lambda_d=\lambda_{ст}=5,76 \cdot 10^{-7} \text{ ч}^{-1}$, постоянного магнита $\lambda_M=1,155 \cdot 10^{-6} \text{ ч}^{-1}$, подшипникового узла $\lambda_{п.у}=2,59 \cdot 10^{-6} \text{ ч}^{-1}$, а гальвомотора в сборе $\Lambda_{ГМ}=\Sigma \lambda_i=5,433 \cdot 10^{-6} \text{ ч}^{-1}$. Можно заметить, что при последовательном соединении узлов надежность системы всегда ниже надежности самого ненадежного элемента.

Рассмотрим оборудование сканатора как набор самостоятельных узлов, вероятность безотказной работы каждого из которых в течение ресурсного срока (8700 ч) равна $P=0,9$. Тогда вероятность безотказной работы каждой из линз коллиматора должна быть не ниже $P_{л1}=\sqrt[3]{P}=\sqrt[3]{0,9}=0,965$ ($\lambda_{л1}=4,04 \cdot 10^{-6} \text{ ч}^{-1}$), а F-theta-объектива — $P_{л2}=\sqrt[4]{P}=\sqrt[4]{0,9}=0,974$ ($\lambda_{л2}=3,03 \cdot 10^{-6} \text{ ч}^{-1}$). Полагая $P_3=P_d=P_{ст}=P_M=0,985$ ($\lambda_i=1,74 \cdot 10^{-6} \text{ ч}^{-1}$), определим вероятность $P_{п.у}=P/P_{л1}^4=0,9/0,985^4=0,956$ ($\lambda_{п.у}=5,16 \cdot 10^{-6} \text{ ч}^{-1}$). Интенсивность отказов гальвомотора в сборе $\Lambda_{ГМ}=\Sigma \lambda_i=-\ln P/\tau_0=-\ln 0,9/8700=12,11 \cdot 10^{-6} \text{ ч}^{-1}$.

Расчет показателей надежности контроллера гальвомотора. В системе автоматического регулирования гальвомотора используется электронная плата контроллера с входящими в нее радиоэлектронными устройствами (РЭУ) в виде электронного модуля (печатного узла). Интенсивность отказов РЭУ Λ_M определяется суммой прогнозируемых значений эксплуатационных интенсивностей отказов элементов $\lambda_{эi}$ [20]:

$$\Lambda_M = \sum_{i=0}^G \lambda_{эi}, \quad (9)$$

где $\lambda_{эi}$ — эксплуатационная интенсивность отказов i -го элемента (компонента), определяемая с учетом его электрического режима, условий работы в составе РЭУ, конструкторско-технологических, функциональных и других особенностей; G — количество элементов (компонентов) в модуле.

Интенсивность отказов отдельных элементов может быть найдена как по данным, предоставляемым производителями, так и определена расчетно. Предварительно были оценены интенсивности отказов элементов, входящих в электрическую схему РЭУ*: конденсаторов, резисторов, интегральных микросхем, диодов и пр. Расчетная интенсивность отказов составила $\Lambda_M=56,262 \cdot 10^{-6} \text{ ч}^{-1}$, время наработки до отказа $\tau=1/\Lambda_M=17773 \text{ ч}$.

Результаты испытаний элементов сканатора. В процессе отработки конструкции сканатора были проведены следующие испытания: 1) измерение жесткости пружинных колец, поджимающих оптические сборки коллиматора и F-theta-объектива; 2) определение формы оптической поверхности сканирующих зеркал после нанесения отражающего покрытия.

Данные о жесткости пружины необходимы для проведения оценочных расчетов предварительной нагрузки на линзы при сборке и определения моментов закручивания резьбовых колец, обеспечивающих требуемую сборочную нагрузку. Измерения были проведены на испытательной универсальной машине Inspekt Table 5 с диапазоном изменения усилия нагрузки от 0,02 до 5,00 кН и пределом допускаемой относительной погрешности измерений силы $\pm 1 \%$. Пружинные кольца нагружались усилием 50 Н несколько раз. Всего были испытаны

* Оценки произведены канд. техн. наук С. Н. Лепешкиным, вед. инженером НПО „ЛУЧ“.

4 пружины, по две для коллиматора и F-theta-объектива. Жесткость пружинного кольца коллиматора составила 5,1 Н/м, жесткость пружинного кольца F-theta-объектива — 2,15 Н/м.

Контроль формы оптических поверхностей сканирующих зеркал проводился на стенде оптических измерений с использованием интерферометра ФТИ-100 с целью установления искажений поверхности. По полученным интерферограммам оптической поверхности искажения составили: максимальный размах — 0,1 мкм для X-зеркала, 0,11 мкм для Y-зеркала, среднеквадратичные отклонения — 0,023 для X- и Y-зеркал. Согласно результатам измерений, искажения формы сканирующих зеркал в расчетных областях расположения пятен лазерной нагрузки не превышают величин, заданных при проектировании.

Заключение. Проведен анализ функциональных требований к сканатору в соответствии с техническим заданием. Для выполнения требований и уменьшения рисков преждевременных отказов оборудования приняты следующие решения, заложенные в конструкторскую документацию и реализованные на практике в опытном образце изготовленного сканатора:

- диаметральные размеры линз увеличены до размеров, гарантирующих беспрепятственное прохождение формируемого лазерного пучка;

- на линзы коллиматора и F-theta-объектива предусмотрено нанесение прочных просветляющих покрытий, гарантирующих безотражательное прохождение лазерного пучка;

- сканирующие зеркала изготовлены из монокристаллического кремния, обладающего высокими прочностными и теплофизическими свойствами; нанесенное отражающее покрытие гарантирует небольшой разогрев зеркала;

- внутрикорпусные тепловыделяющие элементы сканирующей головки имеют надежный тепловой контакт с корпусом, а нанесение на боковые стенки корпуса ребер охлаждения гарантирует низкий перегрев в процессе работы;

- изготовленный гальвомотор с моментным электродвигателем постоянного тока управляется собственным контроллером, который обеспечивает высокий КПД (на уровне 90—95 %) и гарантирует малые тепловые потери и разогрев конструкции.

Результаты испытаний разработанного сканатора подтвердили его работоспособность и надежность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yoder P. R., Jr., Vukobratovich D. Opto-Mechanical Systems Design. CRC Press, 2015. 867 p.
2. Handbook of Optical and Laser Scanning / Ed. G. F. Marshall and G. E. Stutz. CRC Press: Taylor & Francis Group, LLC, 2012. 789 p.
3. <https://www.cambridgetechnology.com/>
4. <https://www.scanlab.de/>
5. <https://www.raylase.de/>
6. <http://sino-galvo.com/>
7. Надежность технических систем. Справочник / Под ред. И. А. Ушакова М.: Радио и связь, 1985. 608 с.
8. Кузнецов Н. Л. Надежность электрических машин: Учеб. пособие. М.: Изд. дом МЭИ, 2006. 432 с.
9. Гольдберг О. Д., Хелемская С. П. Надежность электрических машин. М.: Изд. центр „Академия“, 2010. 288 с.
10. Столов Л. И., Афанасьев А. Ю. Моментные двигатели постоянного тока. М.: Энергоатомиздат, 1989. 224 с.
11. Гридин В. М. Электромагнитные характеристики моментных бесконтактных двигателей постоянного тока // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2011. № 2. С. 75—86.
12. Гридин В. М. Бесконтактный двигатель постоянного тока с коммутацией обмотки двумя транзисторами // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2017. № 4. С. 54—63. DOI: 10.18698/0236-3933-2017-4-54-63.

13. Кенио Т., Нагамори С. Двигатели постоянного тока с постоянными магнитами: Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1989. 184 с.
14. Осин И. Л., Юферов Ф. М. Электрические машины автоматических устройств. М.: Изд. дом МЭИ, 2003. 424 с.
15. Баранов М. В., Бродовский В. Н., Зимин А. В., Каржавов Б. Н. Электрические следящие приводы с моментным управлением исполнительными двигателями. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. 240 с.
16. Лифанов В. А. Расчет электрических машин малой мощности с возбуждением от постоянных магнитов: Учеб. пособие. Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2010. 164 с.
17. Лютаревич А. Г., Долингер С. Ю., Чепурко Н. Ю., Хацевский К. В., Лохман Е. А. Вопросы проектирования электродвигателей постоянного тока с высококоэрцитивными магнитами // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 5. С. 1—9 [Электронный ресурс]: <science-education.ru/ru/article/view?id=15250>, 12.08.2022.
18. Овсянников В. Н. Моментный двигатель с ограниченным углом поворота ротора: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Самара, 2014. 180 с.
19. Godineau K., Lavernhe S., Tournier C. Calibration of galvanometric scan heads for additive manufacturing with machine assembly defects consideration // Additive Manufacturing, 2019. N 1. P. 1—10. DOI: 10.1016/j.addma.2019.02.003.
20. Расчет показателей надежности радиоэлектронных средств / С. М. Боровиков, И. Н. Цырельчук, Ф. Д. Троян; Под ред. С. М. Боровикова. Минск: БГУИР, 2010. 68 с.

Сведения об авторах

- Юрий Иванович Шанин** — канд. техн. наук, ст. научный сотрудник; НИИ НПО „ЛУЧ“; вед. научный сотрудник; E-mail: ShaninYul@sialuch.ru
- Илья Сергеевич Шаранов** — НИИ НПО „ЛУЧ“; зам. начальника отделения; E-mail: SharapovIS@sialuch.ru

Поступила в редакцию 05.09.2022; одобрена после рецензирования 11.11.2022; принята к публикации 20.03.2023.

REFERENCES

1. Yoder P.R., jr., and Vukobratovich D. *Opto-Mechanical Systems Design*, CRC Press, 2015, 867 p.
2. Marshall G.F. and Stutz G.E., ed., *Handbook of Optical and Laser Scanning*, CRC Press, Taylor & Francis Group, LLC, 2012, 789 p.
3. <https://www.cambridgetechnology.com/>.
4. <https://www.scanlab.de/>.
5. <https://www.raylase.de/>.
6. <http://sino-galvo.com/>.
7. Ushakov I.A., ed., *Nadezhnost' tekhnicheskikh sistem. Spravochnik* (Reliability of Technical Systems. Handbook), Moscow, 1985, 608 p. (in Russ.)
8. Kuznetsov N.L. *Nadezhnost' elektricheskikh mashin* (Reliability of Electrical Machines), Moscow, 2006, 432 p. (in Russ.)
9. Gol'dberg O.D., Khelemskaya S.P. *Nadezhnost' elektricheskikh mashin* (Reliability of Electrical Machines), Moscow, 2010, 288 p. (in Russ.)
10. Stolov L.I., Afanas'yev A.Yu. *Momentnyye dvigateli postoyannogo toka* (DC Torque Motors), Moscow, 1989, 224 p. (in Russ.)
11. Gridin V.M. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*, 2011, no. 2, pp. 75–86. (in Russ.)
12. Gridin V.M. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Instrument Engineering*, 2017, no. 4, pp. 54–63, DOI: 10.18698/0236-3933-2017-4-54-63. (in Russ.)
13. Kenjo T., Nagamori Sh. *Permanent-magnet and brushless DC motors*, Oxford, 1985.
14. Osin I.L., Yuferov F.M. *Elektricheskiye mashiny avtomaticheskikh ustroystv* (Electric Machines of Automatic Devices), Moscow, 2003, 424 p. (in Russ.)
15. Baranov M.V., Brodovskiy V.N., Zimin A.V., Karzhavov B.N. *Elektricheskiye sledyashchiye privody s momentnym upravleniyem ispolnitel'nyimi dvigatelyami* (Electric Servo Drives with Torque Control of Actuating Motors), Moscow, 2006, 240 p. (in Russ.)
16. Lifanov V.A. *Raschet elektricheskikh mashin maloy moshchnosti s возбуждением от постоянных магнитов* (Calculation of Electric Machines of Low Power with Excitation from Permanent Magnets), Chelyabinsk, 2010, 164 p. (in Russ.)
17. science-education.ru/ru/article/view?id=15250. (in Russ.)
18. Ovsyannikov V.N. *Momentnyy dvigatel' s ogranichenym uglom povorota rotora* (Torque Motor with Limited Rotor Angle), Candidate's Thesis, Samara, 2014, 180 p. (in Russ.)

19. Godineau K., Lavernhe S., Tournier C. *Additive Manufacturing*, 2019, no. 1, pp. 1–10, DOI: 10.1016/j.addma.2019.02.003.
20. Borovikov S.M., Tsyrel'chuk I.N., Troyan F.D. *Raschot pokazateley nadozhnosti radioelektronnykh sredstv* (Calculation of Indicators of Reliability of Radio Electronic Means), Minsk, 2010, 68 p. (in Russ.)

Data on authors

- Yuriy I. Shanin** — PhD, Senior Scientist; RDI SPA “LUCH”; Leading Researcher;
E-mail: ShaninYul@sialuch.ru
- Ilya S. Sharapov** — RDI SPA “LUCH”, Deputy Head of Department; E-mail: SharapovIS@sialuch.ru

Received 05.09.2022; approved after reviewing 11.11.2022; accepted for publication 20.03.2023.

МЕТОДИКА ОПТИМИЗАЦИИ ВРЕМЯПРОЛЕТНОГО ОПТИЧЕСКОГО ТУРБИДИМЕТРА

Н. Г. ДЖАВАДОВ¹, Ф. Г. АГАЕВ², Б. Р. ДЖАББАРЛЫ^{3*}¹Национальное аэрокосмическое агентство Азербайджанской Республики, Баку, Азербайджан²Институт космических исследований природных ресурсов,
Баку, Азербайджан³Азербайджанский технический университет,
Баку, Азербайджан
cabbarli.bibixanim@mail.ru

Аннотация. Обсуждаются вопросы оптимизации оптоволоконного времяпролетного оптического турбидиметра и определяются условия его оптимального функционирования в обычном и распределенном вариантах реализации, где критерием оптимизации является чувствительность. Предложена методика оптимизации: для обычного случая получены выражения оптимальной связи между временем измерения на приемном оптоволокне светового сигнала, эмиттированного с передающего оптоволокна с начала момента запуска импульса, и расстоянием между передающими и приемными оптоволоконными; для распределенного варианта реализации турбидиметра определены условия экстремального режима работы. Методика может быть применена в перспективных системах контроля качества воды.

Ключевые слова: турбидиметр, оптоволокно, измерения, оптимизация, времяпролетный принцип

Ссылка для цитирования: Джавадов Н. Г., Агаев Ф. Г., Джаббарлы Б. Р. Методика оптимизации времяпролетного оптического турбидиметра // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 5. С. 423—429. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-423-429.

OPTIMIZATION TECHNIQUE FOR A TIME-OF-FLIGHT OPTICAL TURBIDIMETER

N. H. Javadov¹, F. G. Agaev², B. R. Jabbarli^{3*}¹National Aerospace Agency of Azerbaijan Republic, Baku, Azerbaijan²Space Research Institute of Natural Resources,
Baku, Azerbaijan³Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan
cabbarli.bibixanim@mail.ru

Abstract. The issues of optimizing a fiber-optic time-of-flight optical turbidimeter are discussed and the conditions for its optimal operation with sensitivity being the optimization criterion, are determined for both conventional and distributed implementations. An optimization technique is proposed: for the usual case, expressions are obtained for the optimal relationship between the measurement time on the receiving fiber of the light signal emitted by the transmitting fiber, counted from the pulse start moment, and the distance between the transmitting and receiving fibers; for the distributed version of the implementation of the turbidimeter, the conditions for the extreme operation mode are determined. The technique can be applied in advanced water quality control systems.

Keywords: turbidimeter, optical fiber, measurements, optimization, time-of-flight principle

For citation: Javadov N. H., Agaev F. G., Jabbarli B. R. Optimization technique for a time-of-flight optical turbidimeter. *Journal of Instrument Engineering*. 2023. Vol. 66, N 5. P. 423—429 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-423-429.

Введение. Метод лабораторного анализа все еще является наиболее часто используемым методом анализа мутности воды [1]. Этот метод, однако, имеет такие недостатки, как трудоемкость, что объясняется необходимостью взятия проб и доставки их в лабораторию, а также вероятность изменения мутности воды в период доставки пробы и проведения лабораторного

анализа. Очевидно, что выполнение этих операций в режиме реального времени (онлайн) позволяет избежать указанных недостатков. Как показано в работе [2], наиболее распространенным среди онлайн методов является оптический метод анализа. Вместе с тем, согласно [3, 4], при высоких концентрациях взвешенных частиц в воде использование оптических методов не приводит к достаточно точным результатам.

В работе [5] впервые был предложен метод времяпролетного измерения мутности со счетом фотонов с использованием двух оптоволокон. Указанный метод был в дальнейшем развит в работах [6—12], где использован метод времякоррелированного счета фотонов при анализе мутности воды, содержащей частицы формазина в средней концентрации. В этих работах показано, что при малых концентрациях обеспечивается линейность результатов измерений. Развитию этого метода способствовало появление диодных лазеров и сверхбыстрых электронных приборов [13]. Результаты технической реализации времяпролетного метода со счетом фотонов приведены в [14]. Принцип функционирования указанного метода иллюстрируется на рис. 1 (длительность входного и выходного сигналов определяется на уровне 0,5 максимума).

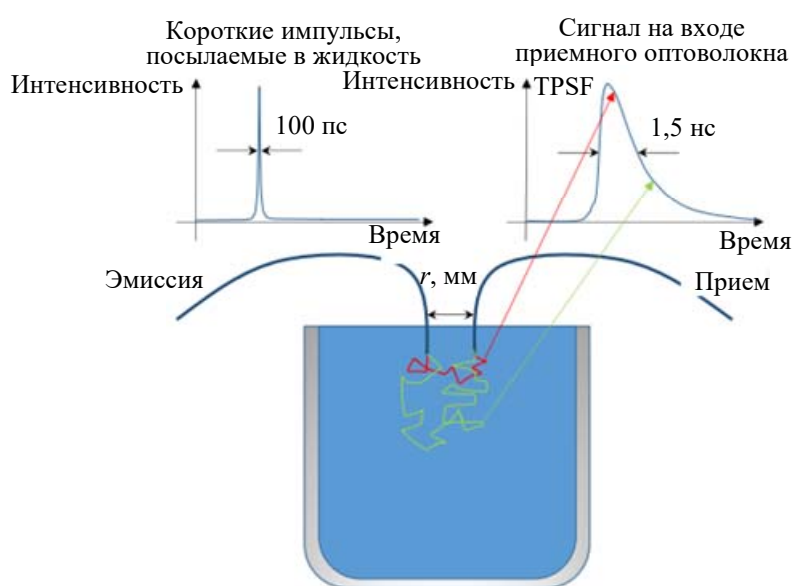


Рис. 1

Принцип работы времяпролетного турбидиметра заключается в следующем [14]. Короткие световые импульсы длительностью 100 пс запускаются в турбидную жидкостную среду посредством оптоволоконного передатчика, на расстоянии r от которого расположен оптоволоконный приемник. При достижении фотонов, запущенных передатчиком приемного оптоволоконна, осуществляется фиксация времени пролета фотона от передатчика к приемнику. Вследствие стохастического характера процесса время пролета фотонов может составлять несколько наносекунд. При этом количество фотонов N , принятых на оптоволоконном приемнике, является функцией времени t и расстояния r между оптоволоконнами:

$$N = (4\pi kt)^{-3/2} \cdot \exp\left(-\mu_a ct - \frac{r^2}{4kt}\right), \quad (1)$$

где k — коэффициент диффузии, определяемый как

$$k = \frac{c}{3(\mu_a + \mu'_s)}; \quad (2)$$

c — скорость света; μ_a — коэффициент абсорбции; μ'_s — коэффициент диффузии.

Регистрация времени прилета отдельных фотонов позволяет построить функцию временного распределения точек (TPSF) в виде гистограммы. При этом, согласно [14], существует определенная регрессионная связь между количеством принятых фотонов, формой кривой

TPSF и концентрацией взвешенных частиц. Согласно экспериментальным исследованиям [14], при $\lambda=650$ нм, частоте повтора 50 МГц и мощности импульсов 1 мВт, где в качестве приемника фотонов использовался лавинный диод id100-MMF50, а $r = 13,5$ мм, после нормализации функции TPSF путем отсечения сигнала отражения от самой среды и учета фотонов в пределах определенного временного интервала, в предположении о стандартной форме функции TPSF (рис. 2) было получено линейное регрессионное уравнение

$$N = a_T M + b_T, \quad (3)$$

где M — концентрация взвешенных частиц; a_T , b_T — регрессионные коэффициенты.

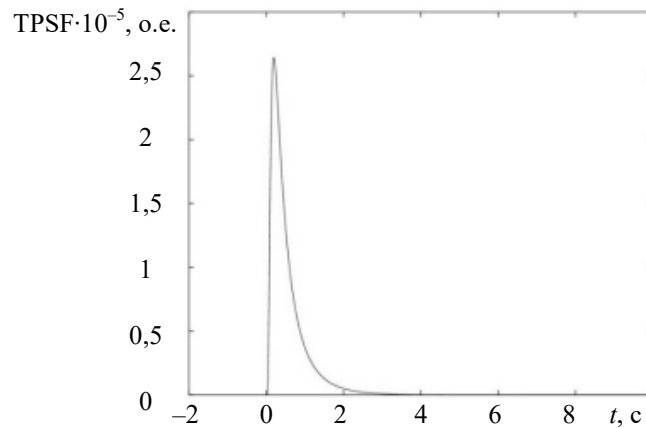


Рис. 2

Вместе с тем с учетом зависимости N от таких аргументов, как M , t и r , актуализируется целесообразность исследования вопросов оптимизации чувствительности времяпролетных оптоволоконных турбидиметров при различных режимах их реализации. В настоящей статье рассматривается возможность оптимизации чувствительности измерений с помощью указанного прибора в нераспределенной и распределенной конфигурациях исполнения.

Предлагаемый метод. Оптимизация времяпролетного турбидиметра, содержащего одну пару приемопередающих оптоволокон. Как следует из вышеизложенного, счету подлежат фотоны, приходящие в фиксированном интервале времени, и определение времени счета может быть автоматизировано. Наряду с этим расстояние между оптоволоконками может быть изменено с помощью механических или пьезомеханических шаговых двигателей.

Задачу оптимизации времяпролетного турбидиметра с одной парой оптоволокон сформулируем следующим образом. С учетом вышеизложенного, в общем случае, показатель N может быть представлен в качестве функции трех переменных: M , t и r , т.е.

$$N = f(t, r, M), \quad (4)$$

тогда комплексная чувствительность определяется как

$$dN = \frac{\delta N}{\delta t} dt + \frac{\delta N}{\delta r} dr + \frac{\delta N}{\delta M} dM. \quad (5)$$

Рассмотрим случай, когда $r = \text{const}$. Согласно (3) имеем

$$\frac{\delta N}{\delta M} = a_T, \quad (6)$$

следовательно, из (5) получим

$$dN = \frac{\delta N}{\delta t} dt + a_T dM \quad (7)$$

или

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\delta N}{\delta t} + a_T \frac{dM}{dt}. \quad (8)$$

Примем $\frac{dM}{dt} = \text{const}$, т.е. концентрация взвешенных частиц не изменяется во времени.

Тогда из (8) получим показатель чувствительности $\frac{dN}{dt}$. Таким образом, можно составить следующую задачу оптимизации: при условиях $r = \text{const}$, $\frac{dM}{dt} = 0$, $\frac{\delta N}{\delta M} = a_T$ необходимо вычислить такое значение t , при котором критерий оптимизации, каковым является $\frac{dN}{dt}$, достигает максимальной величины.

Для решения данной задачи используем метод анализа производных. Из (1) имеем

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{3}{2}(4\pi kt)^{-1} \cdot 4\pi k + \left(-\mu_a c + \frac{r^2}{4kt^2} \right),$$

откуда получаем

$$+\frac{3}{2t} = -\mu_a c + \frac{r^2}{4kt^2}. \quad (9)$$

Из (9) находим

$$3 = -2t\mu_a c + \frac{2r^2}{4kt^2},$$

откуда имеем

$$12kt = -8t^2\mu_a ck + 2r^2 \quad (10)$$

и из (10) окончательно получаем

$$t^2 + \frac{12t}{8\mu_a c} - \frac{2r^2}{8\mu_a ck} = 0. \quad (11)$$

Решение (11) дает

$$t = -\frac{3}{4\mu_a c} + \sqrt{\frac{9}{16\mu_a^2 c^2} + \frac{2r^2}{8\mu_a ck}}.$$

Проверка типа экстремума не проводится, так как эвристически очевидно, что данный экстремум является максимумом.

Оптимизация времяпролетной распределенной структуры турбидиметра, содержащего множество пар приемопередающих оптоволокон. Рассмотрим вариант контроля мутности водоканала, где основной поток воды распределяется на n каналов, в каждом из которых устанавливается пара приемопередающих оптоволокон. Структурная схема времяпролетного турбидиметра распределенной структуры приведена на рис. 3, где БУ — блок управления; УЗ. i — i -й узел турбидиметра; (1-1) — формирователь узкого светового импульса; (1-2) — приемник сигнала приемного оптоволокон; (1-3) — передающее оптоволокон; (1-4) — приемное оптоволокон.

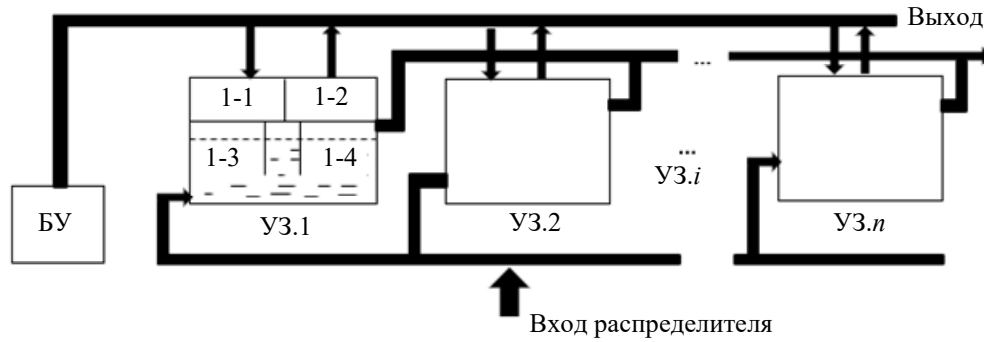


Рис. 3

С учетом (1) количество считанных фотонов в i -м узле турбидиметра определяется как

$$N_i = (4\pi k t_i)^{-3/2} \exp\left(-\mu_a c t_i - \frac{r_i^2}{4k t_i}\right). \quad (12)$$

Для упрощения записи примем следующие обозначения:

$$a_1 = 4\pi k; \quad a_2 = \mu_a c; \quad a_3 = 4k,$$

с учетом которых перепишем выражение (12) как

$$N_i = (a_1 t_i)^{-3/2} \exp\left(-a_2 t_i - \frac{r_i^2}{a_3 t_i}\right). \quad (13)$$

Суммируя (13) по всем i , получаем

$$\sum_{i=1}^n N_i = \sum_{i=1}^n (a_1 t_i)^{-3/2} \exp\left(-a_2 t_i - \frac{r_i^2}{a_3 t_i}\right).$$

Далее введем в рассмотрение функцию управления

$$t_i = \varphi(r_i). \quad (14)$$

Условно приняв $n \rightarrow \infty$, выражение (14) перепишем в непрерывной форме:

$$\int_0^{r_m} N(r) dr = \int_0^{r_m} (a_1 \varphi(r))^{-3/2} \exp\left(-a_2 \varphi(r) - \frac{r_i^2}{a_3 \varphi(r)}\right) dr. \quad (15)$$

Правая часть выражения (15) является целевым функционалом, подлежащим минимизации путем выбора оптимального вида функции $\varphi(r)$, т.е. $\varphi(r)_{\text{opt}}$. Физически, целевой функционал (15) определяет сумму всех фотонов, достигающих оптоволоконных приемников, количество которых равно n , где $n \rightarrow \infty$. Согласно правилам функционального анализа [15], для определения $\varphi(r)_{\text{opt}}$ следует вычислить производную интегранта целевого функционала относительно искомой функции. Минимизация целевой функции осуществляется в целях устранения избыточности в распределенной структуре.

Имеем

$$-\frac{3}{2} \varphi(r)^{-1} + \left(-a_2 + \frac{r^2}{a_3 \varphi^2(r)}\right) = 0,$$

откуда получаем

$$a_2 a_3 \varphi^2(r) + \frac{3}{2} a_3 \varphi(r) - r^2 = 0. \quad (16)$$

Решение (16) имеет вид

$$\varphi(r) = -\frac{3}{4a_2} \pm \sqrt{\frac{9}{16a_2^2} + \frac{r^2}{a_2 a_3}}.$$

Дальнейший анализ показывает, что при

$$\varphi(r) > \frac{4r^2}{3a_3}$$

достигается минимум целевого функционала, в противном случае появляется максимум.

Заключение. Проанализированы вопросы оптимизации известной времяпролетной конструкции турбидиметра в обычном и в распределенном вариантах реализации. Получены выражения оптимальной связи между временем измерения светового сигнала, эмиттированного с передающего оптоволоконного кабеля с начала момента запуска импульса, и расстоянием между передающими и приемными оптоволоконными кабелями. Для нераспределенного варианта реализации турбидиметра задача оптимизации решена относительно максимума измерительного сигнала, для распределенного варианта определены условия экстремального режима работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. McCarthy D. T., Zhang K., Westerlund C., Viklander M., Bertrand-Krjewski J. L., Fletcher T. D., Deletic A. Assessment of sampling strategies for estimation of site mean concentrations of stormwater pollutants // *Water Res.* 2018. N 129. P. 297—304.
2. Rai A. K., Kumar A. Continuous measurement of suspended sediment concentration. Technological advancement and future outlook // *Measurement*. 2015. N 76. P. 209—227.
3. Voichick N., Topping D. J., Griffiths R. E. Technical Note: False low turbidity readings during high suspended sediment concentrations // *Hydrol. Earth Syst. Sci. Discuss.* 2017.
4. Rymaszewicz A., O Sullivan J., Bruen M., Turner J., Lawler D., Cornoy E., Kelly-Quinn M. Measurement differences between turbidity instruments, and their implications for suspended sediment concentration and load calculations: A sensor intercomparison study // *J. Environ. Manag.* 2017. N 199. P. 99—108.
5. Shenoy M. R., Pal B. P., Gupta B. D. Design, Analysis and realization of a turbidity sensor based on collection of scattered light by a fiber-optic probe // *IEEE Sensors Journal*. 2012. N 12. P. 44—50.
6. Wang H., Yang Y., Huang Z., Gui H. Instrument for real-time measurement of low turbidity by using time-correlated single photon counting technique // *IEEE Trans. Instrum. Meas.* 2015. N 64. P. 1075—1083.
7. Yang Y., Wang H., Cao Y., Gui H., Liu J., Lu L., Cao H., Yu T., You H. The design of rapid turbidity measurement system based on single photon detection techniques // *Opt. Laser Technol.* 2015. N 73. P. 44—49.
8. Kramer A., Paul T. A. Fiber-optic probes as sensors for diffuse backscattering presented at the optical sensors // *OSA Tech. Digest (Optical Society of America)*. 2010. Paper SThD2.
9. Prerana, Shenoy M. R., Pal B. P., Gupta B. D. Design, analysis and realization of a turbidity sensor based on collection of scattered light by a fiber-optic probe // *IEEE Sensors Journal*. 2012. Vol. 12. N 1.
10. Prerana, Shenoy M. R., Pal B. P. Method to determine the optical properties of turbid media // *Appl. Opt.* 2008. Vol. 47. P. 3216—3220.
11. Karthik V., Rao S. S., Shenoy M. R., Prerana, Pal B. L. Determination of optical properties of a turbid medium using fiber optic transmission experiment // *Asian. J. Chem.* 2006. Vol. 18. P. 3344—3347.
12. Alvarenga I., Delgado F. S., Juca M. A., Silveria D. D., Coelho T. V. N., Bessa A. S. A novel experimental set-up for turbidity sensing based on plastic optical fibre // *Journal of Modern Optics*. 2017. Vol. 64, iss. 3. P. 214—217.
13. Carrara L., Fiergolski A. An optical interference suppression scheme for TCSPC flash lidar imagers // *Appl. Sci.* 2019. N 9. P. 2206.
14. Pallares A., Schmitt P., Uhring W. Comparison of time resolved optical turbidity measurements for water monitoring to standard real-time techniques // *Sensors*. 2021. N 21. P. 3136. DOI: 10.3390/s21093136.
15. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1974. 432 с.

Сведения об авторах

- Натиг Гаджи оглы Джавадов** — д-р техн. наук, профессор; Национальное аэрокосмическое агентство Азербайджанской Республики; генеральный директор; E-mail: journal_anasa@yahoo.com
- Фахрaddin Гюлали оглы Агаев** — д-р техн. наук, профессор; Институт космических исследований природных ресурсов; директор; E-mail: director.tekti@mail.ru
- Бибиханым Раваят гызы Джаббарлы** — докторант; Азербайджанский технический университет, кафедра спец. технологий; E-mail: cabbarli.bibixanim@mail.ru

REFERENCES

- McCarthy D.T., Zhang K., Westerlund C., Viklander M., Bertrand-Krjewski J.L., Fletcher T.D., Deletic A. *Water Res.*, 2018, no. 129, pp. 297–304.
- Rai A.K., Kumar A. *Measurement*, 2015, no. 76, pp. 209–227.
- Voichick N., Topping D.J., Griffiths R.E. *Hydrology and Earth System Sciences Discussions*, October 2017, DOI:10.5194/hess-2017-528.
- Rymszewicz A., OSullivan J., Bruen M., Turner J., Lawler D., Cornoy E., Kelly-Quinn M. *J. Environ. Manag.*, 2017, no. 199, pp. 99–108.
- Shenoy M.R., Pal B.P., Gupta B.D. *IEEE Sens. J.*, 2012, no. 12, pp. 44–50.
- Wang H., Yang Y., Huang Z., Gui H. *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 2015, no. 64, pp. 1075–1083.
- Yang Y., Wang H., Cao Y., Gui H., Liu J., Lu L., Cao H., Yu T., You H. *Opt. Laser Technol.*, 2015, no. 73, pp. 44–49.
- Kramer A., Paul T.A. *OSA Tech. Digest (CD)*, Optical society of America, 2010, paper SThD2.
- Prerana, Shenoy M.R., Pal B.P., Gupta B.D. *IEEE Sensors J.*, 2012, no. 1(12), January.
- Prerana, Shenoy M.R., Pal B.P. *Appl. Opt.*, 2008, Vol. 47, pp. 3216–3220.
- Karthik V., Rao S.S., Shenoy M.R., Prerana, Pal B.L. *Asian. J. Chem.*, 2006, vol. 18, pp. 3344–3347.
- Alvarenga I., Delgado F.S., Juca M.A., Silveria D.D., Coelho T.V.N., Bessa A.S. *Journal of Modern Optics*, 2017, no. 3(64), pp. 214–217.
- Carrara L., Fiergolski A. *Appl. Sci.*, 2019, no. 9, pp. 2206.
- Pallares A., Schmitt P., Uhring W. *Sensors*, 2021, no. 21, pp. 3136, <https://doi.org/10.3390/s21093136>.
- Elsgolts L.E. *Differentsial'nyye uravneniya i variatsionnoye ischisleniye* (Differential Equations and the Calculus of Variations), Moscow, 1974, 432 p. (in Russ.)

Data on authors

- Natig H. Javadov** — Dr. Sci., Professor; National Aerospace Agency of Azerbaijan Republic; General Manager; E-mail: journal_anasa@yahoo.com
- Fakhraddin G. Agaev** — Dr. Sci., Professor; Space Research Institute of Natural Resources; Director; E-mail: director.tekti@mail.ru
- Bibikhanym R. Jabbarli** — Doctoral Student; Azerbaijan Technical University, Department of Special Technologies; E-mail: cabbarli.bibixanim@mail.ru

Received 06.10.2022; approved after reviewing 22.11.2022; accepted for publication 20.03.2023.

**ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ КОНТРОЛЯ ПРИРОДНОЙ СРЕДЫ,
ВЕЩЕСТВ, МАТЕРИАЛОВ И ИЗДЕЛИЙ**

**INSTRUMENTS AND METHODS FOR MONITORING THE NATURAL ENVIRONMENT,
SUBSTANCES, MATERIALS AND PRODUCTS**

УДК 681.7
DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-430-436

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА
ДЛЯ КОНТРОЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ КОРПУСА ВОЗДУШНОГО СУДНА**

Е. Е. МАЙОРОВ^{1*}, Г. А. КОСТИН², Т. А. ЧЕРНЯК²

¹ Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
Санкт-Петербург, Россия
*majorov_ee@mail.ru

² Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации,
Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. Проведено экспериментальное исследование измерительной системы для контроля поверхностей корпуса воздушного судна. Представлены результаты экспериментальных исследований диапазона измерений, амплитуды выходного сигнала, а также погрешности измерений. Проведен сравнительный анализ результатов экспериментальных измерений с независимыми, выполненными с помощью аттестованного прибора. Получены зависимости усредненной амплитуды выходного сигнала от расстояния от выходного оптического зрачка до исследуемой поверхности при движении контролируемого объекта, а также от диаметра светового пучка на поверхности объекта.

Ключевые слова: воздушное судно, измерительная система, выходной оптический зрачок, диапазон измерений, амплитуда выходного сигнала, погрешность измерений, исследуемая поверхность

Ссылка для цитирования: Майоров Е. Е., Костин Г. А., Черняк Т. А. Экспериментальная измерительная система для контроля поверхностей корпуса воздушного судна // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 5. С. 430—436. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-430-436.

**EXPERIMENTAL MEASURING SYSTEM
FOR CONTROL OF AIRCRAFT HULL SURFACES**

E. E. Maierov^{1*}, G. A. Kostin², T. A. Chernyak²

¹ St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,
St. Petersburg, Russia
*majorov_ee@mail.ru

² St. Petersburg State University of Civil Aviation,
St. Petersburg, Russia

Abstract. A measuring system for monitoring aircraft hull surfaces is studied experimentally. Results of experimental research into the measurement range, the output signal amplitude, as well as the measurement error are presented. A comparative analysis of the results of experimental measurements and independent measurements performed with a certified instrument is carried out. The dependences of the averaged amplitude of the output signal on the distance of the output signal from the optical pupil to the surface under investigation during the controlled object movement, as well as on the light beam diameter at the object surface, are obtained.

Keywords: aircraft, measuring system, optical pupil output, measurement range, output signal amplitude, measurement error, surface under study

For citation: Maierov E. E., Kostin G. A., Chernyak T. A. Experimental measuring system for control of aircraft hull surfaces. *Journal of Instrument Engineering*. 2023. Vol. 66, N 5. P. 430—436 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-430-436.

Введение. В настоящее время гражданская авиация огромное внимание уделяет безопасности полетов [1, 2]. Технические службы аэропорта, осуществляющие контроль за летательным аппаратом, заинтересованы в современных оптико-электронных системах и приборах для контроля поверхности корпуса воздушного судна. Получение высокоинформативной, высокоточной и достоверной информации о форме поверхности летательного аппарата после посадки и до взлета — важнейшая задача для авиации. Для оптического приборостроения значимыми факторами являются расширение функциональных возможностей оптико-электронных систем, повышение информативного содержания измерений и более широкое внедрение таких систем в производственную практику [3, 4].

Оптические приборы и системы измерений формы поверхности основаны на фиксации светового излучения, отраженного от исследуемой поверхности [5, 6]. Эти средства являются методами неразрушающего контроля, так как исключено механическое воздействие на предмет исследования [7, 8]. Кроме того, они пригодны для решения динамических задач и имеют высокую производительность.

Как отмечается в научно-технической литературе, актуальными и перспективными для контроля сложной формы поверхности являются интерференционные системы и приборы, имеющие источники излучения белого света (низкокогерентные с длиной когерентности 1...3 нм) [9, 10]. На сегодняшний день это направление в оптическом приборостроении бурно развивается. Такие приборы и системы характеризуются высокой точностью, необходимым диапазоном измерений для контроля рельефа поверхности, и, что немаловажно, расстояние до измеряемой поверхности не зависит от апертурных углов освещения и наблюдения [11 — 15]. Исследование метрологических характеристик таких измерительных систем представляет несомненный интерес.

Цель настоящей статьи — исследование экспериментальной измерительной системы для контроля поверхностей корпуса воздушного судна, в частности исследование диапазона измерений, амплитуды выходного сигнала и погрешности измерений, а также сравнительный анализ результатов экспериментальных измерений с независимыми, выполненными с помощью аттестованного прибора.

Исследование диапазона измерений. В представленной на рис. 1 измерительной системе (ИС) диапазон измерений определяется смещением опорного зеркала. При смещении опорного зеркала должна обеспечиваться необходимая и достаточная амплитуда оптического сигнала. Поэтому для определения диапазона ИС амплитуда сигнала измерялась при разных расстояниях от оптического зрочка системы до исследуемой поверхности.

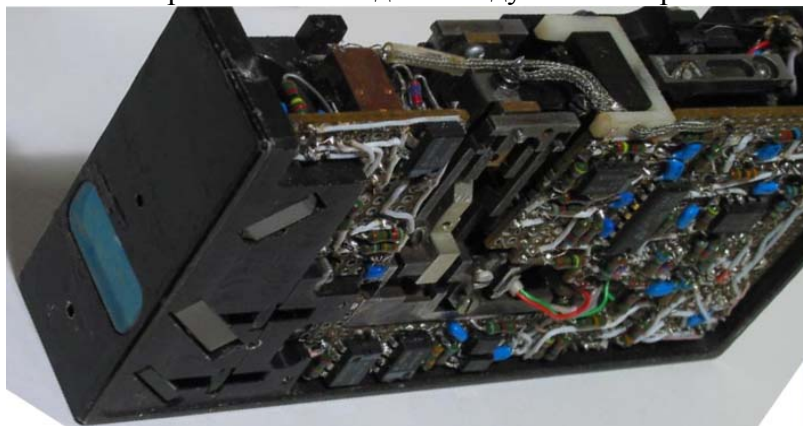


Рис. 1

Начальное расстояние — максимум амплитуды при отсутствии напряжения на модуляторе опорного зеркала — в ходе исследования составляло 100 мм. Зависимость амплитуды сигнала от расстояния до поверхности фиксировалась при движении объекта по оси OZ от начальной точки в обе стороны. Экспериментальные результаты получены при частоте сканирования опорного зеркала $f_M = 46$ Гц и показаны на рис. 2, согласно которому диапазон измерений для данной ИС составляет 0...4 мм.

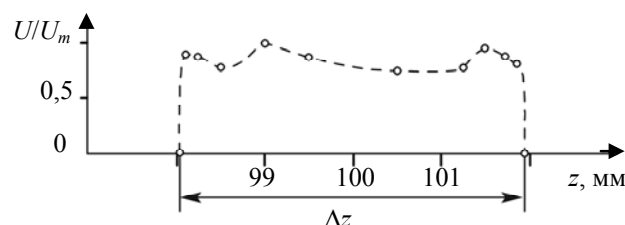


Рис. 2

Исследование амплитуды выходного сигнала. Одна из основных характеристик ИС — амплитуда выходного сигнала, содержащая информацию об определяемом расстоянии. Амплитуда сигнала обеспечивает необходимую величину превышения полезного сигнала над уровнем шумов и помехозащищенность измерений [14, 15].

Исследование амплитуды сигнала при движении опорного зеркала в одну и другую сторону позволяет оценить погрешность ИС, а также объяснить механизм формирования полей рассеяния, которые влияют на точность измерений.

В эксперименте движение исследуемого объекта осуществлялось относительно выходного оптического зрачка (ВОЗ). Производился контроль одной аттестованной поверхности с первым классом шероховатости $R_a = 80$ мкм. Диаметр светового пятна (d) на поверхности изменялся за счет введения стеклянных пластин разной толщины между ВОЗ и контролируемой поверхностью. Согласно результатам исследования, которые представлены на рис. 3, на базовой длине зондируемого участка поверхности амплитуда сигнала может изменяться более чем на порядок. Наблюдаются скачки амплитуды за счет декорреляции полей рассеяния светового излучения. При движении опорного зеркала возникает суперпозиция некоррелированных составляющих светового поля, которые имеют разные амплитуды, что, как следствие, приводит к деформации формы огибающей сигнала, а значит, влияет на точность измерений. На рис. 4 приведены результаты расчета зависимости среднего значения амплитуды сигнала от диаметра светового пучка на измеряемой поверхности. Приведенная зависимость хорошо согласуется с теоретическими расчетами.

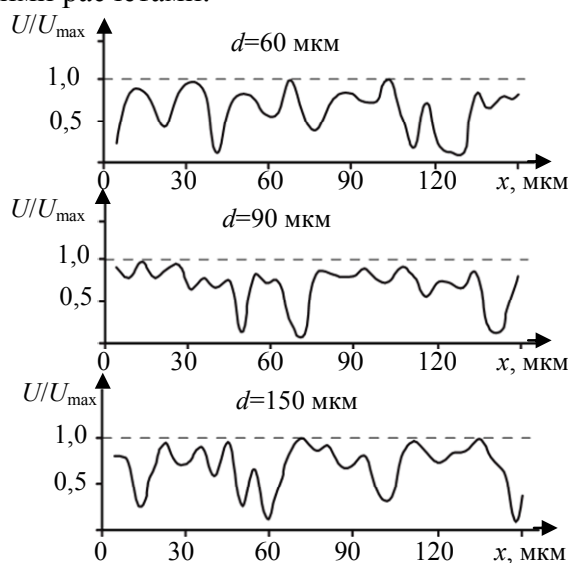


Рис. 3

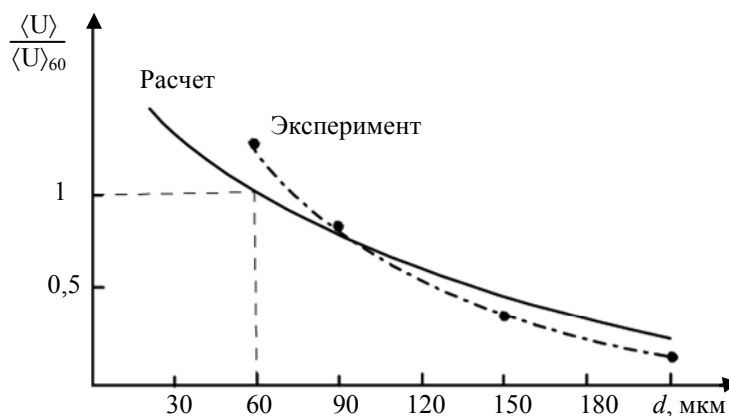


Рис. 4

Исследование погрешности измерений. Для исследования погрешности измерений определялись расстояния до измеряемой поверхности при заданных экспериментатором углах падения светового излучения. Исследуемая поверхность имела разный наклон относительно ВОЗ ИС (углы наклона $\theta = 0, 15, 30, 45^\circ$). Для каждого значения θ фиксировалось расстояние до исследуемой поверхности при движении объекта относительно ВОЗ. Номинальное расстояние было неизменным, а фиксировались изменения этого расстояния. Объект находился на микрометрическом столике, где выставлялся угол наклона в направлении ВОЗ. Движение объекта производилось с шагом 50 мкм, и для каждого угла выполнялись 50 измерений. В ходе эксперимента интерферометром Майкельсона проводился независимый контроль отклонения микрометрического столика при смещении от плоскопараллельного положения. Экспериментальные результаты приведены на рис. 5. Следует отметить, что привязка максимального значения амплитуды сигнала к модуляции опорного зеркала позволила определить систематическую погрешность, которая была учтена в общей погрешности измерений.

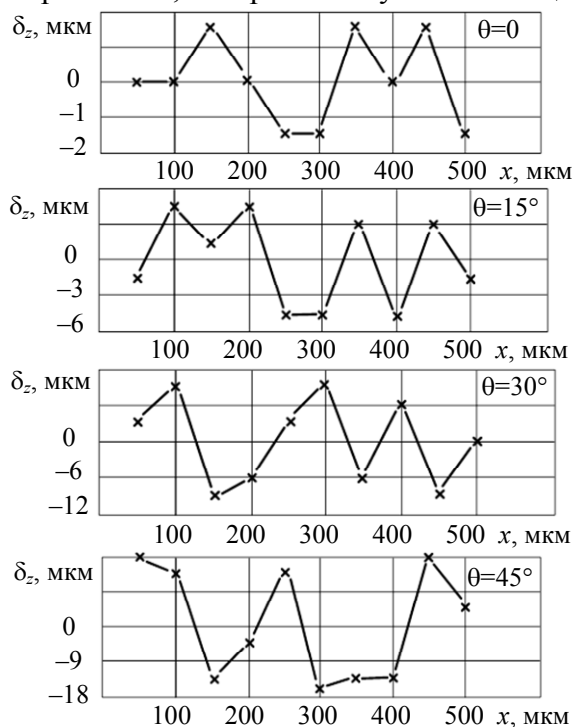


Рис. 5

В ходе исследований был проведен сравнительный анализ экспериментальных результатов измерений расстояния до объекта (Δz) с независимыми данными (Δz_a), полученными на аттестованном приборе: $\delta_z = \Delta z - \Delta z_a$ (рис. 6). В качестве аттестованного прибора использовался

индикатор линейных перемещений 1МИГ (ГОСТ 9696-75), имеющий погрешность измерений 0,5 мкм.

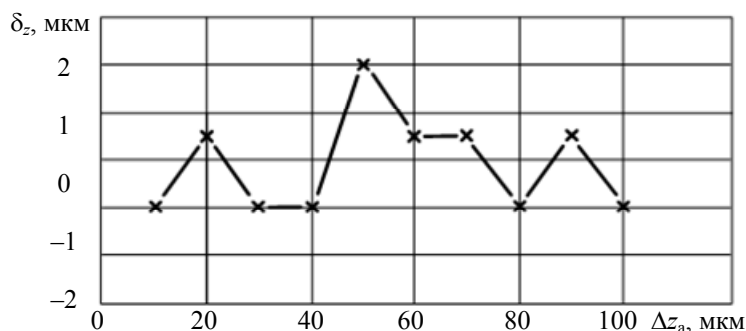


Рис. 6

Заключение. Приведены результаты экспериментальных исследований диапазона измерений, амплитуды выходного сигнала и погрешности измерений ИС. Сравнительный анализ показал, что ИС полностью удовлетворяет требованиям по контролю поверхностей корпуса воздушного судна. Данное исследование может представлять интерес для авиационных технических служб аэропорта, осуществляющих контроль за летательным аппаратом, а также для оптического приборостроения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 855 с.
2. Малакара Д. Оптический производственный контроль / Пер. с англ.; под ред. А. Н. Соснова. М.: Машиностроение, 1985. 340 с.
3. Коломийцев Ю. В. Интерферометры. Л.: Машиностроение, 1976. 296 с.
4. Арефьев А. В., Бородянский Ю. М., Гулиев Р. Б., Дагаев А. В., Майоров Е. Е., Хохлова М. В. Измерение микрорельефа негладких поверхностей автоматизированным интерферометром в низкокогерентном свете // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2020. № 8. С. 211—219.
5. Курлов В. В., Коцкович В. Б., Майоров Е. Е., Пушкина В. П., Таюрская И. С. Экспериментальное исследование разработанной интерференционной системы для измерений поверхности объектов сложной формы // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2020. № 8. С. 179—189.
6. Хохлова М. В., Дагаев А. В., Майоров Е. Е., Арефьев А. В., Гулиев Р. Б., Громов О. В. Интерференционная система измерения геометрических параметров отражающих поверхностей // Междунар. науч.-исслед. журн. 2021. № 6 (108). С. 184—189. DOI: 10.23670/IRJ.2021.108.6.029.
7. Черняк Т. А., Бородянский Ю. М., Майоров Е. Е., Попова Е. В., Петрова Е. А., Хохлова М. В. Математическое моделирование интерференционного сигнала и получение диапазона измерений величины смещения // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2021. Вып. 6. С. 199—204. DOI: 10.24412/2071-6168-2021-6-199-204.
8. Цыганкова Г. А., Майоров Е. Е., Черняк Т. А., Константинова А. А., Машек А. Ч., Писарева Е. А. Исследование разработанного интерферометра поперечного сдвига для настройки интерференционных полос при обработке интерферограмм // Приборы. 2021. № 2. С. 20—25.
9. Майоров Е. Е., Колесниченко С. В., Константинова А. А., Машек А. Ч., Писарева Е. А., Цыганкова Г. А. Исследование флуктуаций фазы выходного сигнала системы фазовых измерений // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2021. № 9. С. 1—6. DOI: 10.25791/pribor.9.2021.1287.
10. Громов О. В., Майоров Е. Е., Черняк Т. А., Удахина С. В., Писарева Е. А., Константинова А. А. Измерения оптических свойств кожного покрова *in vivo* под воздействием современных увлажняющих средств // Междунар. науч.-исслед. журн. 2021. № 3 (105). С. 38—43. DOI: 10.23670/IRJ.2021.105.3.006.
11. Майоров Е. Е., Громов О. В., Курлов В. В., Коцкович В. Б., Петрова Е. А., Пушкина В. П., Таюрская И. С. Исследование рельефа поверхности биологических объектов методом контроля, анализирующим расходимость // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2021. № 2. С. 383—388.

12. Арефьев А. В., Коцкович В. Б., Майоров Е. Е., Пушкина В. П., Сорокин А. А., Удахина С. В. Исследование разработанного интерференционного зонда для измерения неровностей реальных поверхностей // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2022. № 2. С. 1—6. DOI: 10.25791/pribor.2.2022.1319.
13. Арефьев А. В., Курлов В. В., Коцкович В. Б., Майоров Е. Е., Пушкина В. П., Удахина С. В. Исследование постинъекционного эпидермиса модифицированным интерферометром Майкельсона — Физо // Изв. вузов. Приборостроение. 2022. Т. 65, № 4. С. 295—302. DOI: 10.17586/0021-3454-2022-65-4-295-302.
14. Майоров Е. Е., Коцкович В. Б., Пушкина В. П., Арефьев А. В., Гулиев Р. Б., Дагаев А. В. Исследование оптических плоских поверхностей светоделительных пластин средством когерентной оптики // Научное приборостроение. 2022. Т. 32, № 2. С. 65—74.
15. Майоров Е. Е. Исследование разработанной измерительной системы на основе двухлучевой интерферометрии // Моделирование и ситуационное управление качеством сложных систем: Сб. докл. Третьей Всерос. науч. конф., Санкт-Петербург, 18—22 апр. 2022 г. СПб: ГУАП, 2022. С. 52—55. DOI: 10.31799/978-5-8088-1707-4-2022-3.

Сведения об авторах

- Евгений Евгеньевич Майоров** — канд. техн. наук, доцент; СПб ГУАП, кафедра прикладной математики; E-mail: majorov_ee@mail.ru
- Геннадий Александрович Костин** — д-р техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации, кафедра прикладной математики и информатики; проректор по науке и цифровизации; E-mail: ga_kostin@spbguga.ru, g_kostin@mail.ru
- Татьяна Анатольевна Черняк** — канд. экон. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации, кафедра высшей математики; зав. кафедрой; E-mail: 79119113039@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.10.2022; одобрена после рецензирования 01.11.2022; принята к публикации 20.03.2023.

REFERENCES

1. Born M., Wolf E. *Principles of Optics*, Pergamon Press, 1970.
2. Malacara D., ed., *Optical Shop Testing*, Wiley-Interscience, A John Wiley & Sons, Inc., 2007.
3. Kolomiitsev Yu.V. *Interferometry* (Interferometers), Leningrad, 1976, 296p. (in Russ.)
4. Arefiev A.V., Borodyansky Yu.M., Guliev R.B., Dagaev A.V., Maiorov E.E., Khokhlova M.V. *News of the Tula State University. Technical Sciences*, 2020, no. 8, pp. 211—219. (in Russ.)
5. Kurlov V.V., Kotskovich V.B., Majorov E.E., Pushkina V.P., Tayurskaya I.S. *News of the Tula State University. Technical Sciences*, 2020, no. 8, pp. 179—189. (in Russ.)
6. Khokhlova M.V., Dagaev A.V., Arefyev A.V., Guliev R.B., Mayorov E.E., Gromov O.V. *Meždunarodnyj naučno-issledovatel'skij žurnal* (International Research Journal), 2021, no. 6(108), pp. 184—189, DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2021.108.6.029>. (in Russ.)
7. Chernyak T.A., Borodyansky Yu.M., Maiorov E.E., Popova E.V., Petrova E.A., Khokhlova M.V. *News of the Tula State University. Technical Sciences*, 2021, no. 6, pp. 199—204, DOI: 10.24412/2071-6168-2021-6-199-204. (in Russ.)
8. Tsygankova G.A., Majorov E.E., Chernyak T.A., Konstantinova A.A., Mashek A.Ch., Pisareva E.A. *Pribory*, 2021, no. 2, pp. 20—25. (in Russ.)
9. Mayorov E.E., Chernyak T.A., Tsygankova G.A., Mashek A.Ch., Konstantinova A.A. *Instruments and Systems: Monitoring, Control, and Diagnostics*, 2020, no. 7, pp. 25—32, DOI: 10.25791/pribor.07.2020.1190. (in Russ.)
10. Gromov O.V., Mayorov E.E., Chernyak T.A., Udakhina S.V., Pisareva E.A., Konstantinova A.A. *Meždunarodnyj naučno-issledovatel'skij žurnal* (International Research Journal), 2021, no. 3(105), pp. 38—43, DOI: <https://doi.org/10.23670/IRJ.2021.105.3.006>. (in Russ.)
11. Majorov E.E., Gromov O.V., Kurlov V.V., Kotskovich V.B., Petrova E.A., Pushkina V.P., Tayurskaya I.S. *News of the Tula State University. Technical Sciences*, 2021, no. 2, pp. 383—388. (in Russ.)
12. Arefiev A.V., Kotskovich V.B., Maiorov E.E., Pushkina V.P., Sorokin A.A., Udakhina S.V. *Instruments and Systems: Monitoring, Control, and Diagnostics*, 2022, no. 2, pp. 1—6, DOI: 10.25791/pribor.2.2022.1319 (in Russ.)
13. Arefiev A.V., Kurlov B.B., Kotskovich V.B., Maiorov E.E., Pushkina V.P., Udakhina S.V. *Journal of Instrument Engineering*, 2022, no. 4(65), pp. 295—302, DOI: 10.17586/0021-3454-2022-65-4-295-302. (in Russ.)
14. Maiorov E.E., Kotskovich V.B., Pushkina V.P., Arefiev A.V., Guliyev R.B., Dagaev A.V. *Nauchnoe Priborostroyeniye* (Scientific Instrumentation), 2022, no. 2(32), pp. 65—74. (in Russ.)
15. Maiorov E.E. *Modelirovaniye i situatsionnoye upravleniye kachestvom slozhnykh sistem* (Modeling and Situational Quality Management of Complex Systems), Third All-Russian Scientific Conference, St. Petersburg, April 18—22, 2022, pp. 52—55, DOI: 10.31799/978-5-8088-1707-4-2022-3. (in Russ.)

Data on authors

- Evgeny E. Maiorov** — PhD, Associate Professor; St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Department of Applied Mathematics;
E-mail: majorov_ee@mail.ru
- Gennady A. Kostin** — Dr. Sci., Associate Professor; St. Petersburg State University of Civil Aviation, Department of Applied Mathematics and Computer Science; Vice-Rector for Science and Digitalization; E-mail: ga_kostin@spbguga.ru, g_kostin@mail.ru
- Tatiana A. Chernyak** — PhD, Associate Professor; St. Petersburg State University of Civil Aviation, Department of Higher Mathematics; Head of the Department;
E-mail: 79119113039@yandex.ru

Received 25.10.2022; approved after reviewing 01.11.2022; accepted for publication 20.03.2023.