

**МУЛЬТИСТАБИЛЬНАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ
С ОДНОПОЛЯРНОЙ ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ**Ж. Т. ЖУСУБАЛИЕВ¹, А. З. АБДИРАСУЛОВ², У. А. СОПУЕВ², Е. А. КОЛОМИЕЦ^{1*}¹Юго-Западный государственный университет, Курск, Россия

*lenus07@yandex.ru

²Ошский государственный университет, Ош, Киргизия

Аннотация. Исследуется динамика негладкого отображения с большим числом многообразий переключения, описывающего поведение однополярной широтно-импульсной системы управления энергообеспечением нагревательной установки (печи) для выращивания монокристаллов сапфира. Показано, что такое отображение демонстрирует особый тип мультистабильности, когда в фазовом пространстве динамической системы сосуществуют несколько вложенных друг в друга притягивающих замкнутых инвариантных кривых, соответствующих устойчивым двухчастотным колебаниям. Результаты исследований важны для создания новых способов прогнозирования, обнаружения, подавления нерегулярных колебаний и катастрофических явлений, возникающих при вариации параметров и воздействии помех, а также для проектирования импульсных систем автоматического управления с заданными динамическими свойствами и прогнозируемой динамикой.

Ключевые слова: мультистабильность, бифуркации граничного столкновения, негладкое непрерывное отображение, квазипериодическая седло-узловая бифуркация, замкнутая инвариантная кривая, двухчастотные колебания

Благодарности: работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, программа стратегического академического лидерства „Приоритет-2030“, гранты № 1.71.23 П, 1.7.21/S-2, и Ошского государственного университета, грант № 14-22.

Ссылка для цитирования: Жусубалиев Ж. Т., Абдирасулов А. З., Сопуев У. А., Коломиец Е. А. Мультистабильная динамика системы управления с однополярной широтно-импульсной модуляцией // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 3. С. 220—229. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-220-229.

**MULTISTABLE DYNAMICS OF A CONTROL SYSTEM
WITH UNIPOLAR PULSE-WIDTH MODULATION**Zh. T. Zhusubaliyev¹, A. Z. Abdirasulov², U. A. Sopuev², E. A. Kolomiets^{1*}¹Southwest State University, Kursk, Russia

*lenus07@yandex.ru

²Osh State University, Osh, Kirghizia

Abstract. The dynamics of a non-smooth mapping with a large number of switching manifolds, which describes the behavior of a unipolar pulse-width control system for the energy supply of a heating installation (furnace) for growing sapphire single crystals, is studied. Such a mapping is shown to demonstrate a special type of multistability, when several nested attractive closed invariant curves corresponding to stable two-frequency oscillations coexist in the phase space of the dynamic system. Results of the research are important for creating new methods of predicting, detecting, and suppressing irregular oscillations and catastrophic phenomena that arise when parameters vary and are exposed to interference, as well as for designing pulsed automatic control systems with specified dynamic properties and predictable dynamics.

Keywords: multistability, border collision bifurcations, non-smooth continuous mapping, quasi-periodic saddle-node bifurcation, closed invariant curve, two-frequency oscillations

Acknowledgements: the work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, the program of strategic academic leadership “Priority-2030”, grants No. 1.71.23 P, 1.7.21/S-2, and Osh State University, grant No. 14-22.

For citation: Zhusubaliyev Zh. T., Abdirasulov A. Z., Sopuev U. A., Kolomiets E. A. Multistable dynamics of a control system with unipolar pulse-width modulation. *Journal of Instrument Engineering*. 2024. Vol. 67, N 3. P. 220—229 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-3-220-229.

Введение. Мультистабильность или одновременная устойчивость нескольких режимов — широко распространенное явление в нелинейных динамических системах [1—3], которое проявляется в существовании нескольких устойчивых режимов при одних и тех же значениях параметров.

Глобальная устойчивость является редким свойством нелинейных систем, поскольку из этого свойства вытекает, что существует единственный аттрактор, притягивающий все траектории фазового пространства. Реальные же системы демонстрируют мультистабильное поведение.

В настоящей статье исследуется особый тип мультистабильности в негладких отображениях, когда сосуществуют несколько вложенных друг в друга притягивающих замкнутых инвариантных кривых, соответствующих устойчивым двухчастотным колебаниям. Изначально этот феномен был обнаружен авторами работ [4—6] в конкретном классе моделей физических систем и долгое время считался экзотическим примером динамического поведения. В [7] на примере кусочно-линейного непрерывного отображения (нормальной формы) показано, что этот вид мультистабильности — общее свойство широкого класса негладких динамических систем (см. также [8]).

Напомним, что негладкие отображения возникают при моделировании многих задач теории управления, механики, физики, биологии и медицины. Такие отображения „сшиваются“ из отдельных гладких функций, области определения которых разделены так называемыми *многообразиями переключения*. При вариации параметров неподвижная/периодическая точка дискретной системы (отображения) сталкивается с одним из многообразий переключения (бифуркации „граничного столкновения“ — Border Collision Bifurcations) [9, 10]. Это приводит к нарушению условий существования неподвижной/периодической точки и, как следствие, вызывает необычные нелинейные явления, например непрерывный переход от одного типа периодического движения к другому, „умножение“ периода колебаний, рождение из неподвижной точки хаотических режимов в результате единственной бифуркации [11—13].

Бифуркации „граничного столкновения“ [9] не имеют аналогов в гладких системах и не связаны с нарушением условия гиперболичности неподвижной/периодической точки, поэтому они не поддаются анализу методами классической теории бифуркаций.

Основная цель данной работы — изучение механизмов рождения и трансформаций вложенных друг в друга замкнутых инвариантных кривых в дискретной модели (негладкого непрерывного отображения) однополярной широтно-импульсной системы управления энергообеспечением печи для выращивания монокристаллов сапфира. Подробное описание нагревательной установки (печи) приведено в [14].

Постановка задачи. Уравнение движения рассматриваемой системы в безразмерной форме имеет следующий вид:

$$\dot{x} = \lambda_1(x - S(t, x, y)); \dot{y} = \lambda_2(y - S(t, x, y)); S(t, x, y) = S(t + 1, x, y); \quad (1)$$

здесь $S(t, x, y)$ — кусочно-постоянная функция:

$$S = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{4},$$

$$S_1 = \operatorname{sgn}(\varphi - \eta_1), S_2 = \operatorname{sgn}(\varphi + \eta_1), S_3 = \operatorname{sgn}(\varphi - \eta_2), S_4 = \operatorname{sgn}(\varphi + \eta_2);$$

$$\eta_1 = \frac{q}{\alpha\Gamma}(t - \lfloor t \rfloor), \eta_2 = \frac{q}{\alpha\Gamma}(1 - t + \lfloor t \rfloor), \varphi = \frac{q}{\Gamma} + x(t) - \vartheta y(t)|_{t=\lfloor t \rfloor}, \vartheta = \lambda_1 / \lambda_2,$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ — функция, выделяющая целую часть аргумента; физический смысл переменных x, y, S и параметров $\lambda_1, \lambda_2, q, \alpha, \Gamma$ пояснен в [14].

Несложно доказать, что скользящих решений в системе (1) не может быть. Методика получения математических моделей рассматриваемого класса импульсных систем в безразмерной форме (1) приведена в [14].

Уравнения (1) сводятся к негладкому непрерывному отображению $F: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ вида

$$F: (x, y) \mapsto F(x, y), \quad F(x, y) = \begin{cases} F_L(x, y), & (x, y) \in S_L; \\ F_M^{(1)}(x, y), & (x, y) \in S_M^{(1)}; \\ F_M^{(2)}(x, y), & (x, y) \in S_M^{(2)}; \\ F_M^{(3)}(x, y), & (x, y) \in S_M^{(3)}; \\ F_M^{(4)}(x, y), & (x, y) \in S_M^{(4)}; \\ F_R(x, y), & (x, y) \in S_R, \end{cases} \quad (2)$$

где $F(x, y)$ — кусочно-гладкая вектор-функция, в которой

$$\begin{aligned} F_L(x, y) &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(x-1)+1} \\ e^{\lambda_2(y-1)+1} \end{bmatrix}; \quad F_M^{(1)}(x, y) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(x-1)+\frac{1}{2}e^{\lambda_1(2-z)}+\frac{1}{2}} \\ e^{\lambda_2(y-1)+\frac{1}{2}e^{\lambda_2(2-z)}+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}; \\ F_M^{(2)}(x, y) &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(x-1/2)+\frac{1}{2}e^{\lambda_1(1-z)}} \\ e^{\lambda_2(y-1/2)+\frac{1}{2}e^{\lambda_2(1-z)}} \end{bmatrix}; \quad F_M^{(3)}(x, y) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(x+1/2)-\frac{1}{2}e^{\lambda_1(1+z)}} \\ e^{\lambda_2(y+1/2)-\frac{1}{2}e^{\lambda_2(1+z)}} \end{bmatrix}; \\ F_M^{(4)}(x, y) &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(x+1)-\frac{1}{2}e^{\lambda_1(2+z)}-\frac{1}{2}} \\ e^{\lambda_2(y+1)-\frac{1}{2}e^{\lambda_2(2+z)}-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}; \quad F_R(x, y) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(x+1)-1} \\ e^{\lambda_2(y+1)-1} \end{bmatrix}, \\ z &= \frac{2\alpha\Gamma}{q}\varphi, \quad \varphi = \frac{q}{\Gamma} + x - \vartheta y, \quad \vartheta = \lambda_1/\lambda_2 \end{aligned}$$

и области определения функций $F_L(x, y)$, $F_M^{(i)}(x, y)$, $i = 1, 2, 3, 4$, $F_R(x, y)$ представлены как

$$\begin{aligned} S_L &= \left\{ (x, y) : \frac{q}{\Gamma} + x - \vartheta y > \frac{q}{\alpha\Gamma} \right\}; \quad S_M^{(1)} = \left\{ (x, y) : \frac{q}{2\alpha\Gamma} \leq \frac{q}{\Gamma} + x - \vartheta y \leq \frac{q}{\alpha\Gamma} \right\}; \\ S_M^{(2)} &= \left\{ (x, y) : 0 \leq \frac{q}{\Gamma} + x - \vartheta y < \frac{q}{2\alpha\Gamma} \right\}; \quad S_M^{(3)} = \left\{ (x, y) : -\frac{q}{2\alpha\Gamma} \leq \frac{q}{\Gamma} + x - \vartheta y < 0 \right\}; \\ S_M^{(4)} &= \left\{ (x, y) : -\frac{q}{\alpha\Gamma} \leq \frac{q}{\Gamma} + x - \vartheta y < -\frac{q}{2\alpha\Gamma} \right\}; \quad S_R = \left\{ (x, y) : \frac{q}{\Gamma} + x - \vartheta y < -\frac{q}{\alpha\Gamma} \right\}. \end{aligned}$$

Каждая из функций $F_L(x, y)$, $F_M^{(i)}(x, y)$, $i = 1, 2, 3, 4$, и $F_R(x, y)$ — класса C^1 и монотонна во всей своей области определения S_L , $S_M^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, S_R . Границы этих областей называют многообразиями переключения, где производные первого порядка $F(x, y)$ по x и y не существуют.

Двухчастотные колебания и мультистабильность в негладких системах. Отображения вида (2) описывают двухчастотные колебания в негладких системах с мультистабильным поведением (см., например, [8]).

Двухчастотные режимы широко распространены в природе и технике. Такие колебания характеризуются двумя независимыми частотами. В фазовом пространстве динамической

системы (2) двухчастотным колебаниям соответствует аттрактор в форме замкнутой инвариантной кривой. Характер движения на инвариантной кривой определяется числом вращения, которое представляет собой отношение частот. Когда оно иррационально, инвариантная кривая плотно заполняется траекториями и динамика квазипериодична. При рациональном числе вращения на замкнутой кривой лежит пара периодических орбит: устойчивая и седловая, а сама инвариантная кривая образована неустойчивыми многообразиями седловой орбиты. Это относится к случаю захвата частоты, когда происходит синхронизация колебаний с двумя независимыми частотами в одно периодическое колебание с общим периодом. Причем отношение частот постоянно и рационально на интервале значений параметров.

Особенность мультистабильных систем заключается в высокой чувствительности к помехам, которые могут приводить к непрогнозируемым изменениям динамики. Для мультистабильных систем создана теория скрытых аттракторов [15—17].

Как известно [15], определение скрытых колебаний было введено для гладких автономных дифференциальных уравнений. Попытки ввести определение для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью или отображений были предприняты в работах [6, 18, 19]. Однако главная проблема исследования мультистабильности связана с поиском специальных инвариантных множеств, таких как репеллеры, седловые периодические орбиты [15—17] вместе с их устойчивыми и неустойчивыми многообразиями. Устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия нельзя рассчитать ни аналитически, ни с помощью техники линеаризации. К настоящему времени разработано несколько численных методов расчета устойчивых и неустойчивых инвариантных множеств [20—28].

Стандартный подход к расчету инвариантных многообразий заключается в итерации так называемой фундаментальной области, когда итерируется локальная область седловой периодической орбиты [20, 29, 30]. Ограничимся упрощенным описанием подхода (детали см. в [20, 30]).

Идея такого подхода состоит в следующем [20, 30]. Обозначим через n_- , n_0 и n_+ , $n_0 + n_- + n_+ = n$ — число мультипликаторов $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ седловой периодической точки $\mathbf{x}_0$ периода m : $F^m(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$, $F^k(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{x}_0$, $1 \leq k < m$, лежащих внутри, на границе и вне единичного круга соответственно. Напомним, что собственные значения $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ матрицы монодромии называются мультипликаторами периодической точки $\mathbf{x}_0$.

Подпространство собственных векторов матрицы монодромии, для которых $|\rho| < 1$, называется устойчивым E^s и неустойчивым E^u для $|\rho| < 1$ [30].

Пусть $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)^*$ — гиперболическая седловая периодическая точка $n^- \cdot n^+ \neq 0$ на фазовой плоскости (2); здесь * — знак транспонирования матрицы. Тогда $n^- = n^+ = 1$, так что существуют один вещественный мультипликатор, например, $|\rho_1| > 1$, а другой — тоже вещественный $|\rho_2| < 1$. В этом случае имеются два инвариантных многообразия, проходящие через $\mathbf{x}_0$, а именно: одномерное неустойчивое многообразие, образованное орбитами, сходящимися к $\mathbf{x}_0$ при итерации F^{-1} , и одномерное устойчивое многообразие, образованное множеством орбит, сходящихся к $\mathbf{x}_0$ при итерации F .

Для расчета неустойчивого многообразия из седловой периодической точки $\mathbf{x}_0$ откладывается N эквидистантных точек с малым шагом вдоль E^u . Затем каждая из таких точек поочередно выбирается в качестве начальной и производится большое число итераций $F : F^k$, $k = 1, 2, \dots, M$. Устойчивое многообразие вычисляется аналогично как неустойчивое

многообразие обратной функции — F^{-k} , $k = 1, 2, \dots, M$, т.е. путем итерации обратной функции в локальной области седлового цикла вдоль E^s ; здесь $N, M \in \mathbb{N}^+$ — множество целых чисел без нуля.

В [23] предложен численный метод расчета устойчивых одномерных инвариантных многообразий двумерных отображений, не требующий определения обратной функции или ее аппроксимации. Это так называемый „Search Circle (SC)“-алгоритм [23]. Такой подход особенно важен в случае, когда нельзя получить отображение Пуанкаре аналитически для заданного векторного поля. Его можно использовать и в случае, когда отображение необратимо. Метод реализован в виде прикладной программы в пакете DsTool и в настоящее время является одним из эффективных в своем классе.

Численный алгоритм расчета одномерных устойчивых инвариантных многообразий седловых периодических орбит негладких непрерывных отображений предложен в [29]. Основу алгоритма составляет оригинальный метод построения обратной функции, состоящий в сведении этой задачи к численному решению скалярного уравнения независимо от порядка модели. Такой метод позволяет исключить необходимость решения систем нелинейных уравнений и преодолеть при этом вычислительные проблемы. В отличие от „Search Circle (SC)“-алгоритма [23], он обобщается на модели произвольного порядка, когда требуется расчет, например, двумерных инвариантных многообразий.

Следует отметить, что этот подход был реализован и опробован авторами для частного класса негладких непрерывных отображений с двумя многообразиями переключения [29], а также удалось обобщить его на негладкие непрерывные отображения с произвольным числом многообразий переключения. Кроме того, алгоритм, построенный на базе такого подхода, можно применить, как и [23], для необратимых негладких отображений. Эти результаты нигде не опубликованы, поэтому в представленной статье приведена только ссылка на работу [8], в которой расчет инвариантных многообразий выполнен с помощью указанного алгоритма.

И наконец, несколько слов об одной из самых сложных задач — задаче нахождения периодических движений [15—17]. Устойчивые и седловые периодические движения рассчитывались с помощью алгоритма, который базируется на процедуре сканирования выбранной области фазового пространства с переменным шагом для локализации решений уравнения неподвижной/периодической точки. Затем каждое локализованное решение уточняется итерационным методом Ньютона — Рафсона с заданной точностью. Алгоритм применялся при решении большого числа задач.

Бифуркационный анализ. Исследования проводились при следующих значениях параметров: $\lambda_1 = -0,3125$, $\lambda_2 = -0,03125$, $q = 13,727882855$, $\Gamma = 7,0$, $19,0 < \alpha < 21,0$. На рис. 1 изображена бифуркационная диаграмма, рассчитанная численно для $19,0 < \alpha < 21,0$ и $\Gamma = 7,0$. Диаграмма иллюстрирует основные стадии рождения и трансформаций сосуществующих аттракторов и рассчитывалась с помощью специального алгоритма. Для каждого значения варьируемого параметра α поиск аттракторов проводился при начальных условиях, генерируемых случайно, а также при начальных условиях, соответствующих точкам фазового пространства системы (2), лежащим на траекториях аттракторов, найденных на предыдущем значении α .

Алгоритм включает процедуры по определению направления изменения параметра α (в сторону возрастания или убывания) в пределах заданного диапазона его вариации и динамического изменения числа начальных условий, генерируемых случайно, которое учитывает информацию об аттракторах, найденных на предыдущих шагах вариации α .

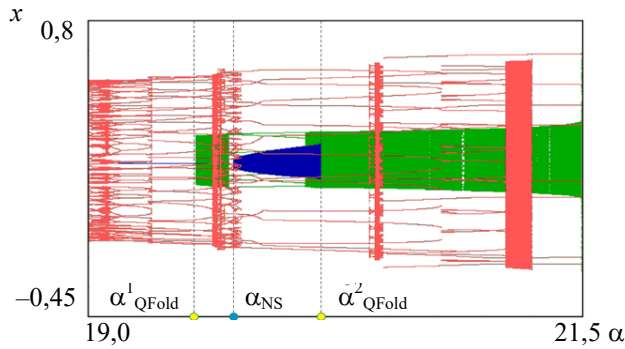


рис. 1

Бифуркационная диаграмма (см. рис. 1) содержит несколько ветвей. Ветвь, которая начинается с неподвижной точки, назовем основной. При увеличении α возникает устойчивая замкнутая инвариантная кривая через суперкритическую бифуркацию Неймарка — Сакера в точке α_{NS} из теряющей устойчивость неподвижной точки (см. первую ветвь на рис. 1). Вторая ветвь возникает жестко через седло-узловую квазипериодическую бифуркацию [30] в точке α_{QFold}^1 , при которой рождается пара замкнутых инвариантных кривых — устойчивая и неустойчивая. До точки бифуркации α_{NS} устойчивая инвариантная кривая сосуществует с устойчивой неподвижной точкой и другим аттрактором, который в зависимости от параметров может быть периодическим, квазипериодическим или хаотическим.

На рис. 2, а показан фазовый портрет отображения для значения $\alpha = 19,87$, правее от точки бифуркации Неймарка — Сакера α_{NS} . Фазовый портрет иллюстрирует случай сосуществования трех аттракторов, два из которых — устойчивые замкнутые кривые, а третий — устойчивая периодическая орбита с периодом 15. Границей бассейнов притяжения сосуществующих инвариантных кривых (в отображениях на плоскости) является неустойчивая замкнутая кривая с периодической динамикой. Как и в [23], для наглядности фазовые портреты приводятся в исходных переменных $x_1 = -254,95(x - y)$, $x_2 = 7,967361(x - y)$, где x_1 — температура нагревательной установки в точке измерения, x_2 — производная x_1 по времени t . Пять вертикальных линий на фазовых портретах соответствуют многообразиям переключения.

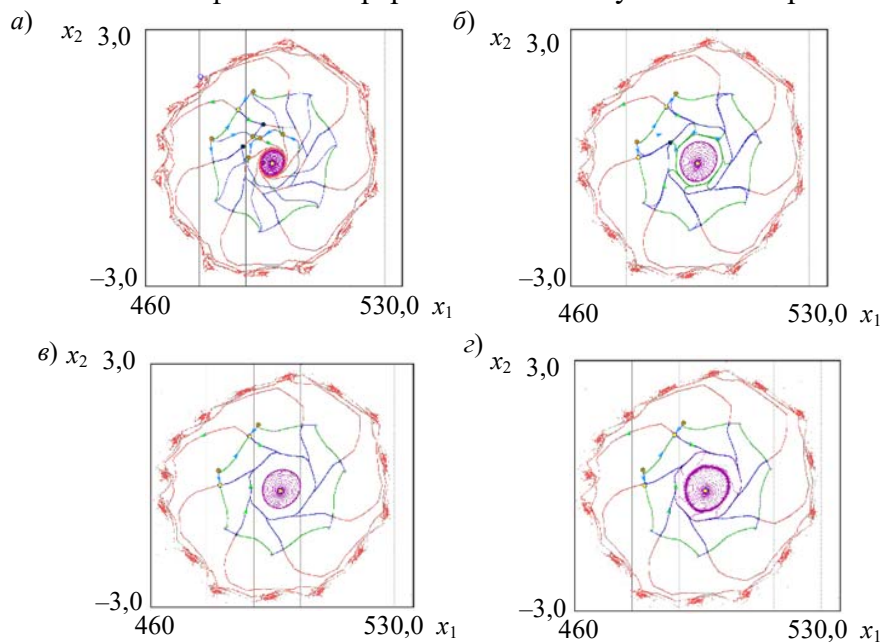


Рис. 2

Как видно из рис. 2, а, бассейны притяжения замкнутой резонансной инвариантной кривой и устойчивого 15-го цикла (обозначен светло-малиновым цветом на рис. 2, а—г) разделены неустойчивой замкнутой кривой, которая образована устойчивыми многообразиями седлового 7-го цикла и точками 7-го цикла, имеющего тип неустойчивого фокуса. Бассейны же притяжения замкнутой инвариантной кривой с квазипериодической динамикой, возникающей через бифуркацию Неймарка — Сакера (см. основную ветвь на рис. 1), и резонансной кривой периода 7 (вторая зеленая ветвь на рис. 1) разделены другой неустойчивой инвариантной кривой. Неустойчивая замкнутая кривая образована устойчивыми многообразиями седлового 7-го цикла и точками неустойчивого 7-го цикла (репеллера) другого типа. Устойчивая замкнутая инвариантная кривая с периодической динамикой (резонансная кривая периода 7) образована неустойчивыми многообразиями седлового 7-го цикла.

При дальнейшем увеличении α неустойчивая замкнутая кривая с периодической динамикой становится неустойчивой квазипериодической (зеленая кривая на рис. 2, б, $\alpha = 20,0$) через бифуркацию „граничного столкновения“. Затем, с увеличением α , аналогичную бифуркацию претерпевает устойчивая замкнутая кривая с периодической динамикой. В результате такой бифуркации она становится устойчивой кривой с квазипериодической динамикой (рис. 2, в, $\alpha = 20,12$). Бассейны притяжения сосуществующих квазипериодических аттракторов разделены неустойчивой квазипериодической инвариантной кривой, которая на рис. 2, в не показана (см. также замкнутую кривую, выделенную на рис. 2, б зеленым цветом).

И наконец, устойчивая (темно-малиновая на рис. 2, в), принадлежащая первой ветви бифуркационной диаграммы, и неустойчивая (зеленая на рис. 2, б) квазипериодические замкнутые кривые исчезают через седло-узловую квазипериодическую бифуркацию [30] при α_{QFold}^2 . На рис. 2, г, $\alpha = 20,176165$, приведен фазовый портрет отображения после этой бифуркации, когда отображение демонстрирует бистабильную динамику: квазипериодический аттрактор второй ветви, который на бифуркационной диаграмме выделен зеленым цветом, сосуществует с устойчивым периодическим решением периода 15. Границей бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов является неустойчивая периодическая замкнутая кривая.

Заключение. Выполнен бифуркационный анализ негладкого отображения с большим числом многообразий переключения с мультистабильной динамикой. Это отображение является дискретной моделью однополярной широтно-импульсной системы управления энергообеспечением печи для выращивания кристаллов искусственного сапфира.

Показано, что отображение демонстрирует особый тип мультистабильного поведения, когда в фазовом пространстве сосуществуют несколько вложенных друг в друга замкнутых инвариантных кривых, соответствующих двухчастотным колебаниям.

Исследованы механизмы рождения и исчезновения сосуществующих замкнутых инвариантных кривых через суперкритическую бифуркацию Неймарка — Сакера, последовательность бифуркаций граничного столкновения и квазипериодической седло-узловой бифуркации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Feudel U., Grebogi C., Hunt B. R., Yorke J. A. Map with More than 100 Coexisting Low-Period Periodic Attractors // Phys. Rev. E 54. 1996. P. 71—81.
2. Feudel U. Complex Dynamics in Multistable Systems // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18. P. 1607—1626.
3. Feudel U., Pisarchik A., Showalter K. Multistability and Tipping: From Mathematics and Physics to Climate and Brain — Minireview and preface to the focus issue // Chaos. 2018. Vol. 28. P. 033501.

4. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., Yahochkina O. O. Torus Bifurcations in Multilevel Converter Systems // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2011. Vol. 21. P. 2343—2356.
5. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., Pavlova E.V. Multistability and Torus Reconstruction in a DC-DC Converter with Multilevel Control // IEEE Trans. on Industrial Informatics. 2013. Vol. 9. P. 1936—1946.
6. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. Multistability and Hidden Attractors in a Multilevel DC/DC Converter // Math. Comput. Simul. 2015. Vol. 109. P. 32—45.
7. Avrutim V., Zhusubaliyev Zh. T. Nested Closed Invariant Curves in Piecewise Smooth Maps // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2019. Vol. 29, N. 7. P. 193001721.
8. Zhusubaliyev Zh. T., Avrutin V., Gardini L., Sushko I. Border Collision Bifurcation of a Resonant Closed Invariant Curve // Chaos. 2022. Vol. 32. P. 043101.
9. Feigin M. I. Doubling of the Oscillation Period with C-Bifurcations in Piecewise Continuous Systems // PMM J. Appl. Math. Mech. 1970. Vol. 34. P. 861—869.
10. Nusse H. E., Yorke J. A. Border-Collision Bifurcations Including „Period Two to Period Three“ Bifurcation for Piecewise Smooth Systems // Physica D. 1992. Vol. 57. P. 39—57.
11. Nonlinear Phenomena in Power Electronics / Ed.: S. Banerjee, G. C. Verghese. N. Y.: IEEE Press, 2001. 645 p.
12. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. World Scientific, 2003. 363 p.
13. Di Bernardo M., Budd C. J., Champneys A. R., Kowalczyk P. Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications. Springer, 2008. 483 p.
14. Жусубалиев Ж. Т., Рубанов В. Г., Гольцов Ю. А., Яночкина О. О., Поляков С. А. Квазипериодичность в системе управления температурным полем нагревательной установки // Научные ведомости БелГУ. Серия Экономика. Информатика. 2017. № 23(272), вып. 44. С. 113—122.
15. Leonov G. A., Kuznetsov N. V. Hidden Attractors in Dynamical Systems. From Hidden Oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, and Kalman Problems to Hidden Chaotic Attractor in Chua Circuit // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2013. Vol. 23, N 1. P. 1330002.
16. Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Prasad A. Hidden Attractors in Dynamical Systems // Physics Reports. 2016. Vol. 637. P. 1—50.
17. Кузнецов Н. В. Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2020. Т. 59, № 5. С. 5—27.
18. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., Churilov A. N., Medvedev A. Multistability and Hidden Attractors in an Impulsive Goodwin Oscillator with Time Delay // The European Physical Journal. Special Topics. 2015. Vol. 224, N 8. P. 1519—1539.
19. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., Rubanov V. G., Nabokov R. A. Multistability and Hidden Attractors in a Relay System with Hysteresis // Physica D. 2015. Vol. 306. P. 6—15.
20. Parker T. S., Chua L. O. Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems. N. Y.: Springer Verlag, 1989. 348 p.
21. Nusse H. E., Yorke J. A. A Procedure for Finding Numerical Trajectories in Chaotic Saddles // Physica D. 1989. Vol. 36, N 1—2. P. 137—156.
22. You Z., Kostelich E. J., Yorke J. A. Calculating Stable and Unstable Manifolds // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 1991. Vol. 01, N 03. P. 605—623.
23. England J. P., Krauskopf B., Osinga H. M. Computing One-Dimensional Stable Manifolds and Stable Sets of Planar Maps Without the Inverse // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2004. Vol. 3, N 2. P. 161—190.
24. Krauskopf B., Osinga H. M., Doedel E. J., Henderson M. E., Guckenheimer J., Vladimirovsky A., Dellnitz M., Junge O. A survey of Methods for Computing (Un)stable manifolds of Vector Fields // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, N. 03. P. 763—791.
25. Funderinger D. Toward the Calculation of Higher-Dimensional Stable Manifolds and Stable Sets for Noninvertible and Piecewise-Smooth Maps // Journal Nonlinear Sci. 2008. Vol. 18. P. 391—413.

26. Li H., Fan Y., Zhang J. A New Algorithm for Computing One-Dimensional Stable and Unstable Manifolds of Maps // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2012. Vol. 22, N 01. P. 1250018.
27. Guckenheimer J., Krauskopf B., Osinga H. M., Sandstede B. Invariant Manifolds and Global Bifurcations // Chaos. 2015. Vol. 25, N 9. P. 097604.
28. Yue X.-L., Xu Y., Xu W., Sun J.-Q. Global Invariant Manifolds of Dynamical Systems with the Compatible Cell Mapping Method // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2019. Vol. 29, N 8. P. 1950105.
29. Жусубалиев Ж. Т., Рубанов В. Г., Гольцов Ю. А. К расчету инвариантных многообразий кусочно-гладких отображений // Изв. Юго-Западного гос. ун-та. 2020. № 24(3). С. 166—182.
30. Kuznetsov Yu. A., Meijer H. G. E. Numerical Bifurcation Analysis of Maps: From Theory to Software. Cambridge Univ. Press, 2019. 753p.

Сведения об авторах

- Жаныбай Турсунбаевич Жусубалиев** — д-р техн. наук, профессор; Юго-Западный государственный университет, кафедра вычислительной техники, Международная научная лаборатория динамики негладких систем;
E-mail: zhanybai@gmail.com
- Айтибек Закирович Абдирасулов** — Ошский государственный университет, IT академия; директор;
E-mail: aitibek.osh@gmail.com
- Уланбек Адахимжанович Сопуев** — канд. физ.-мат. наук, доцент; Ошский государственный университет, факультет математики и информационных технологий; декан;
E-mail: ulansopuev@mail.ru
- Елена Александровна Коломиец** — канд. техн. наук; Юго-Западный государственный университет, кафедра вычислительной техники, Международная научная лаборатория динамики негладких систем; ст. преподаватель;
E-mail: lenus07@yandex.ru

Поступила в редакцию 27.11.2023; одобрена после рецензирования 05.12.2023; принята к публикации 14.01.2024.

REFERENCES

1. Feudel U., Grebogi C., Hunt B.R., Yorke J.A. *Phys. Rev. E*, 1996, vol. 54, pp. 71–81.
2. Feudel U. *Intern. J. Bifurcation and Chaos*, 2008, vol. 18, pp. 1607–1626.
3. Feudel U., Pisarchik A., Showalter K. *Chaos*, 2018, vol. 28, pp. 033501.
4. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., Yahochnikina O.O. *Intern. J. Bifurcation and Chaos*, 2011, vol. 21, pp. 2343–2356.
5. Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E., Pavlova E.V. *IEEE Trans. on Industrial Informatics*, 2013, vol. 9, pp. 1936–1946.
6. Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E. *Math. Comput. Simul.*, 2015, vol. 109, pp. 32–45.
7. Avrutin V., Zhusubaliyev Zh.T. *Intern. J. Bifurcation and Chaos*, 2019, no. 7(29), pp. 193001721.
8. Zhusubaliyev Zh.T., Avrutin V., Gardini L., Sushko I. *Chaos*, 2022, vol. 32, pp. 043101.
9. Feigin M.I. *PMM J. Appl. Math. Mech.*, 1970, vol. 34, pp. 861–869.
10. Nusse H.E., Yorke J.A. *Physica D*, 1992, vol. 57, pp. 39–57.
11. Banerjee S., Verghese G.C., eds., *Nonlinear Phenomena in Power Electronics*, IEEE Press, NY, 2001, 645 p.
12. Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E. *Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems*, World Scientific, 2003, 363 p.
13. Di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R., Kowalczyk P. *Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*, Springer, 2008, 483 p.
14. Zhusubaliyev Zh.T., Rubanov V.G., Gol'tsov Yu.A., Yanochnikina O.O., Polyakov S.A. *Belgorod State University Scientific Bulletin Economics. Information Technologies*, 2017, no. 23(272), pp. 113–122. (in Russ.)
15. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. *Intern. J. Bifurcation and Chaos*, 2013, no. 1(23), pp. 1330002.
16. Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Prasad A. *Physics Reports*, 2016, vol. 637, pp. 1–50.
17. Kuznetsov N.V. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2020, no. 5(59), pp. 647–668.
18. Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E., Churilov A.N., Medvedev A. *The European Physical Journal. Special Topics*, 2015, no. 8(224), pp. 1519–1539.
19. Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E., Rubanov V.G., Nabokov R.A. *Physica D*, 2015, vol. 306, pp. 6–15.
20. Parker T.S., Chua L.O. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, NY, Springer-Verlag, 1989, 348 p.
21. Nusse H.E., Yorke J.A. *Physica D*, 1989, no. 1-2(36), pp. 137–156.
22. You Z., Kostelich E.J., Yorke J.A. *Intern. J. Bifurcation and Chaos*, 1991, no. 03 (01), pp. 605–623.
23. England J.P., Krauskopf B., Osinga H.M. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2004, no. 2(3), pp. 161–190.
24. Krauskopf B., Osinga H.M., Doedel E.J., Henderson M.E., Guckenheimer J., Vladimirovsky A., Dellnitz M., Junge O. *Intern. J. Bifurcation and Chaos*, 2005, no. 03(15), pp. 763–791.

25. Fundering D. J. *Nonlinear Sci.*, 2008, vol. 18, pp. 391–413.
26. Li H., Fan Y., Zhang J. *Intern. J. Bifurcation and Chaos*, 2012, no. 01(22), pp. 1250018.
27. Guckenheimer J., Krauskopf B., Osinga H.M., Sandstede B. *Chaos*, 2015, no. 9(25), pp. 097604.
28. Yue X.-L., Xu Y., Xu W., Sun J.-Q. *Intern. J. Bifurcation and Chaos*, 2019, no. 8(29), pp. 1950105.
29. Zhusubaliyev Zh.T., Kuzmina D.S., Yanochkina O.O. *Proceedings of the Southwest State University*, 2020, no. 3(24), pp. 166–182. (in Russ.)
30. Kuznetsov Yu.A., Meijer H.G.E. *Numerical Bifurcation Analysis of Maps: from Theory to Software*, Cambridge University Press, 2019, 753 p.

Data on authors

- | | |
|---------------------------------|---|
| Zhanybai T. Zhusubaliyev | — Dr. Sci., Professor; Southwest State University, Department of Computer Science, International Scientific Laboratory for Dynamics of Non-Smooth Systems; E-mail: zhanybai@gmail.com |
| Aitibek Z. Abdirasulov | — Osh State University, IT Academy; Director; E-mail: aitibek.osh@gmail.com |
| Ulanbek A. Sopuev | — PhD, Associate Professor; Osh State University, Faculty of Mathematics and Information Technology; Dean; E-mail: ulansopuev@mail.ru |
| Elena A. Kolomiets | — PhD; Southwest State University, Department of Computer Science, International Scientific Laboratory for Dynamics of Non-Smooth Systems; Senior Lecturer; E-mail: lenus07@yandex.ru |

Received 27.11.2023; approved after reviewing 05.12.2023; accepted for publication 14.01.2024.