

---

# КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

## COMPUTER SIMULATION AND DESIGN AUTOMATION

---

УДК 004.94:531.4;612.766  
DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-10-831-836

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО КАСАТЕЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СТОПЫ С ОПОРНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В. М. Мусалимов<sup>1\*</sup>, С. Ю. Перепелкина<sup>2</sup>, М. А. Ерофеев<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт проблем машиноведения Российской Академии наук, Санкт-Петербург, Россия

\* musvm@yandex.ru

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

**Аннотация.** Представлены результаты исследования процесса взаимодействия стопы с опорной поверхностью при ходьбе в фазах опоры и переката. В основу исследований положены экспериментальные данные сгибания–разгибания–пронации и супинации голеностопного сустава и реакций стопы при ходьбе. Основное внимание уделено анализу поперечной составляющей сил реакции. Установлено, что ударные составляющие сил реакций стопы целесообразно моделировать с помощью обобщенных функций Эрмита, а фазу переката стопы — скручиваемым эластичным армированным цилиндром. Результаты исследования используются при разработке мехатронных ортезов голеностопного сустава, они нацелены на разработку методов оценки и выявления плоскостопия на ранних этапах развития с перспективой построения карт реабилитации.

**Ключевые слова:** биомеханический анализ движений, ударно-фрикционное взаимодействие, упруго-фрикционное взаимодействие, функция Эрмита

**Благодарность:** работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 124041500009-8).

**Ссылка для цитирования:** Мусалимов В. М., Перепелкина С. Ю., Ерофеев М. А. Моделирование поперечного касательного взаимодействия стопы с опорной поверхностью // Изв. вузов. Приборостроение. 2024. Т. 67, № 10. С. 831–836. DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-10-831-836.

### MODELING OF TRANSVERSE TANGENTIAL INTERACTION OF THE FOOT WITH THE SUPPORTING SURFACE

V. M. Musalimov<sup>1\*</sup>, S. Yu. Perepelkina<sup>2</sup>, M. A. Erofeev<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS, St. Petersburg, Russia

\* musvm@yandex.ru

<sup>2</sup> Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

**Abstract.** Results of the study of the interaction of the foot with the support surface during walking in the phases of support and rolling are presented. The research is based on experimental data on flexion–extension–pronation and supination of the ankle joint and foot reactions when walking. The main attention is paid to the analysis of the transverse component of the reaction forces. It was found that it is advisable to model the shock components of the foot reaction forces using generalized Hermite functions, and the phase of the foot roll with a twisted elastic reinforced cylinder. The results of the study are used in the development of mechatronic ankle orthoses. They are aimed at developing methods for assessing and identifying flat feet in the early stages of development with the prospect of building rehabilitation maps.

**Keywords:** biomechanical analysis of movements, impact-friction interaction, elastic-friction interaction, Hermite function

**Acknowledgments:** the work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. 124041500009-8).

**For citation:** Musalimov V. M., Perepelkina S. Yu., Erofeev M. A. Modeling of transverse tangential interaction of the foot with the supporting surface. *Journal of Instrument Engineering*. 2024. Vol. 67, N 10. P. 831–836 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2024-67-10-831-836.

**Введение.** Биомеханика и функции стопы различны в фазах фрикционного взаимодействия с опорной поверхностью. Между фазами ударно-фрикционного взаимодействия переднего и заднего отделов стопы находится в фазе полной опоры, механика которой исследуется в статье. В работе использованы синхронизированные экспериментальные данные системы для захвата движений по исследованию кинематики ходьбы и динамометрической системы [1, 2]. В эксперименте принимали участие женщины и мужчины без явных нарушений здоровья, без каких-либо травм, не являющиеся профессиональными спортсменами. Все фазы взаимодействия представлены на циклограмме рис. 1 (полный цикл шага ( $c$ , %); доли циклов шага при контакте (60 %) и при переносе стопы (40 %)). 1 — пяточный контакт; 2 — полное опирание стопы; 3 — точка в момент перехода на носочную опору; 4 — точка предельного носочного контакта; 5 — точка в момент перехода в фазу переноса стопы; 6, 7 — точки в фазе переноса; 8 — точка пяточного контакта в момент завершения фазы переноса).

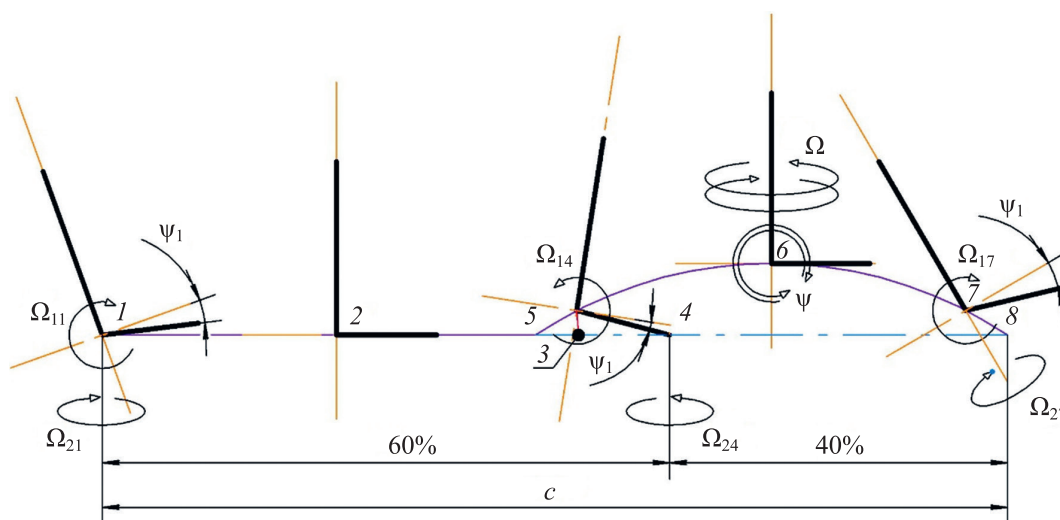


Рис. 1

Система координат представлена в сагиттальной плоскости двумя ортогональными осями, одна из которых жестко связана с осью голени. Отметим, что 60 % цикла шага ( $c = 60$ ) соответствуют только последовательности конфигураций голеностопного сустава в фазе контакта с опорной поверхностью. При пяточном (первая конфигурация) и носочном (вторая конфигурация) контактах наблюдается подошвенное разгибание — угол  $\psi_1$ . Третья конфигурация описывается ортогональной системой координат — полное опирание стопы. В целях удобства образного представления эти конфигурации на рисунке пространственно разнесены. При опоре на пятку возникают вращающий момент в сагиттальной плоскости и сопутствующий вращающий — в опорной. Введем обозначения соответствующих угловых скоростей:  $\Omega_{11}$ ,  $\Omega_{21}$ . Первые индексы соотносятся с номерами плоскостями, вторые — точек. При опоре на носок также возникают вращающие моменты. В опорной плоскости моменту соответствует угловая скорость  $\Omega_{24}$ , а в сагиттальной —  $\Omega_{14}$ . Фаза переноса стопы обозначена условной дугой с точками 5–8. В этой фазе ступня совершает колебательные движения:  $\Omega(t)$  — относительно оси, связанной с голенью, и  $\psi(t)$  — в сагиттальной плоскости. Отрезок прямой с граничными точками 3, 8 определяет длину шага.

Ранее нами были установлены закономерности ударно-фрикционного взаимодействия пятки и носка стопы [3]. При этом фаза полного опирания (переката) не вписывалась в „удар-

ную концепцию". Целью настоящей работы является моделирование механики переката стопы. Отметим, что в ряде работ только отмечается факт проявления поперечной составляющей силы трения [4–8]. Даже специалисты в области оценок жесткости голеностопных суставов не принимают во внимание этот фактор [9–12], и моделированию этого явления не уделялось должного внимания.

**Анализ экспериментальных данных.** На рис. 2 представлено распределение касательных поперечных сил  $F$  в плоскости опоры.

Пяточная и носочная области стопы постоянно находятся в зонах ударного взаимодействия, которое в опорной плоскости естественно моделируется обобщенными функциями Эрмита [3]. Преимуществом обобщенных функций Эрмита является свойство локальности, заключающееся в том, что их поведение в пространстве на  $[x_1, x_2]$  не зависит от поведения и построения на других отрезках. Этими функциями удобно моделировать ударно-фрикционное взаимодействие, которое проявляется как локальный импульс или момент импульса силы. Кроме того, параметры этих функций благодаря развитому аппарату теории вероятностей прозрачны для интерпретации результатов расчетов. Так, на рис. 3 слева (пятка) и справа (носок) локальные взаимодействия при трении верчения представлены формулами:

—  $c = 0\text{--}20\%$

$$E_1 = A_1(x - B_1)\exp(-((x - B_1)/D_1)^2), \quad (1)$$

—  $c = 40\text{--}55\%$

$$E_2 = A_2(x - B_2)\exp(-((x - B_2)/D_2)^2) \quad (2)$$

с параметрами данных, полученных из эксперимента.  $B_1 = 10$ ;  $B_2 = 50$ ;  $D_1 = 4$ ;  $D_2 = 4$ ;  $a_1 = -1,25$ ; при этом  $F = E_1 + E_2$ . В (1), (2)  $A$  — предельные значения функций,  $B$  — точки мгновенного касания пятки и носка с опорной поверхностью,  $D$  — дисперсионный параметр, здесь аргумент  $c = x$ .

Как видно из рис. 2 и 3, фаза переката находится в пределах  $c = 16\text{--}44\%$ , т. е. вне локальных зон функций Эрмита. На рис. 4 эта фаза представлена наклонным участком, который аппроксимируется линейным уравнением

$$F_g = a + bx, \quad (3)$$

где в условиях представленного распределения сил  $a = 6,168$ ;  $b = 0,1974$ . Здесь  $a \equiv F^*\%$  — максимальное значение касательных сил в зоне переката стопы;  $b$  — тангенс угла наклона прямой, а  $\gamma = \arctg b = 0,144$  рад — угол наклона прямой, далее принимаемый за угол развертки винтовой линии на модельном цилиндре и угол относительного сдвига того же упругого цилиндра.

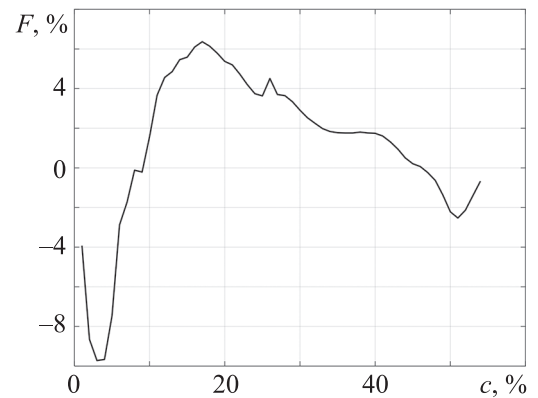


Рис. 2

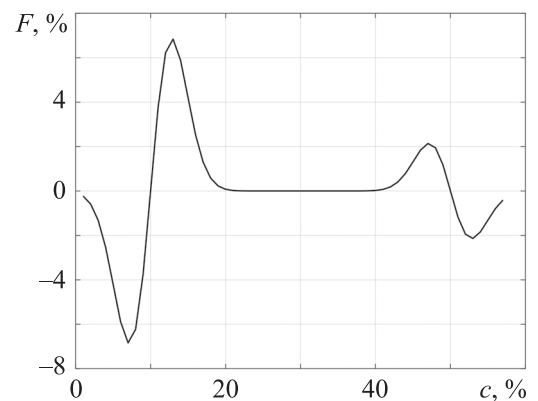


Рис. 3

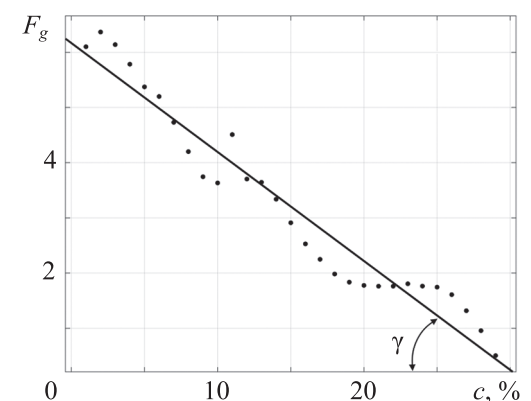


Рис. 4

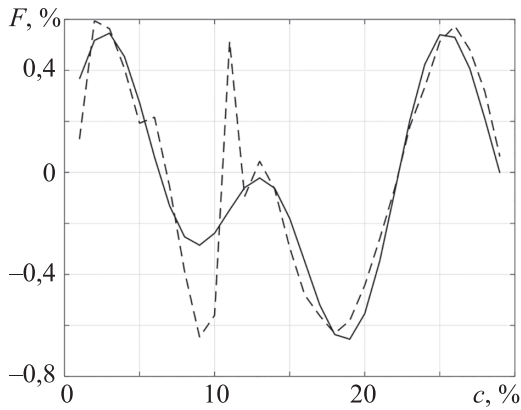


Рис. 5

Кроме того, здесь наблюдается колебательный процесс (точки), который аппроксимируется рядами Фурье (рис. 4, прямая):

$$F = a_0 + a_1 \cos(cw) + b_1 \sin(cw) + a_2 \cos(2cw) + b_2 \sin(2cw), \quad (4)$$

где коэффициенты  $a_0 = -0,096$ ;  $a_1 = 0,1182$ ;  $b_1 = 0,3262$ ;  $a_2 = 0,1006$ ;  $b_2 = 0,3316$ ;  $w = 0,2768$  — частота колебаний (рис. 5, штрихи — эксперимент, сплошная — ряд Фурье).

Таким образом, винтовое движение совместно с поперечным колебательным процессом реализует перекал стопы. Для образного представления

процесса перекала стопы можно было бы использовать метафору „ход змеи“.

**Винтовое перекалывание.** При постановке задачи примем, что боковая часть подошвы представляет собой армированный вдоль оси коллагеновыми волокнами упругий цилиндр. В начале контакта пятки с опорой под тупым углом голень–стопа, как показывает опыт [13], формируется ударный момент пары сил, которые моделируются обобщенными функциями Эрмита  $E_1(c)$ . Одновременно закручивается цилиндр на угол  $\gamma$ , и волокна при этом располагаются по винтовой линии AC (рис. 6). Сам цилиндр за счет пружинного действия арочной ступни укорачивается — отрезок BC. Далее реализуется процесс тыльного сгибания, имеющего критическую точку и критическое значение, по достижении которого начинается процесс перекалывания цилиндра по винтовой. Это соответствует развертке винтовой линии, где A'C — это первоначальная длина цилиндра. Угол  $\gamma$  является углом относительного сдвига при кручении [14] и далее с учетом модуля сдвига  $G$  рассчитываются касательные напряжения на боковой поверхности цилиндра и опорной поверхности, которые и формируют силы трения в поперечном направлении при ходьбе. На рис. 6 представлена схема упруго-винтового перекала стопы, где  $q$ , % — распределенная вертикальная нагрузка в этой зоне.

Известно [14], что угол закручивания вычисляется по формуле:

$$\angle AOB = \varphi = \frac{M_{кр} BC}{GJ_p},$$

где  $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$  — полярный момент инерции круглого стержня (цилиндра),  $d = 2r$  — плечо пары сил,  $M_{кр} = Fd$  — момент кручения.

После несложных алгебраических преобразований получим выражение для поперечного упруго-фрикционного увода стопы:

$$\frac{F^x}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{\pi r^2}{2} G. \quad (5)$$

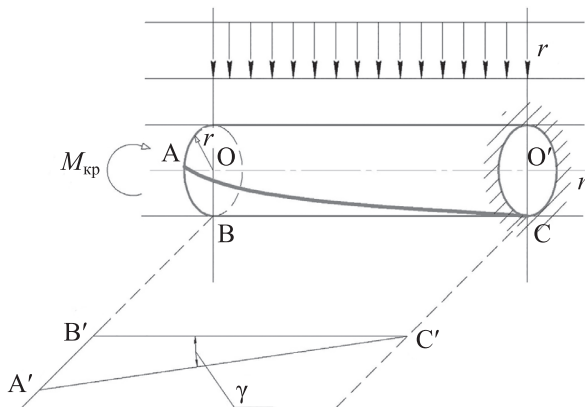


Рис. 6

Формула (5) отражает связь между силами касательного поперечного взаимодействия стопы с учетом упругих свойств ее подошвенной части, с геометрией упругого приведенного стержня и углом развертки винтовой линии — углом увода стопы. По существу это формула упруго-винтового увода стопы. Практическая ценность формулы заключается, например, в обоснованном проектировании реабилитационного ортеза стопы с учетом левого-правого винтов. Отметим, что левая часть

формулы описывает результат обработки данных эксперимента; значения параметров правой части имеют некоторую неопределенность, потому что при использовании подхода „приведенный цилиндр“ радиус цилиндра не может быть выбран произвольным, а только в паре с модулем сдвига  $G$ :

$$Z = r^2 G,$$

где  $Z = \frac{2}{\gamma\pi} F^*$ , и при задании параметра  $Z$  радиус может быть оценен, как это представлено на рис. 7.

Здесь сплошная кривая получена при значении  $Z = 400$  %, пунктир — при  $Z = 500$  %, что соответствует весу 70 и 80 кг испытуемых.

**Заключение.** Опыты показали, что в пяточной и носочной областях ступни силы поперечного касательного взаимодействия обеспечивают процесс трения вращения, сам процесс локализован. В силу этого для моделирования процесса были использованы локализованные функции Эрмита. В области переката стопы, в свою очередь, силы касательного взаимодействия моделируются винтовым упруго-фрикционным уводом и колебательно-скользящим взаимодействием латерального участка ступни с поверхностью. Полученная в результате исследований формула упруго-винтового увода стопы используется для оценки радиуса приведенного упругого стержня (цилиндра), что является основанием для разработки конструктивных рекомендаций при производстве ортезов.

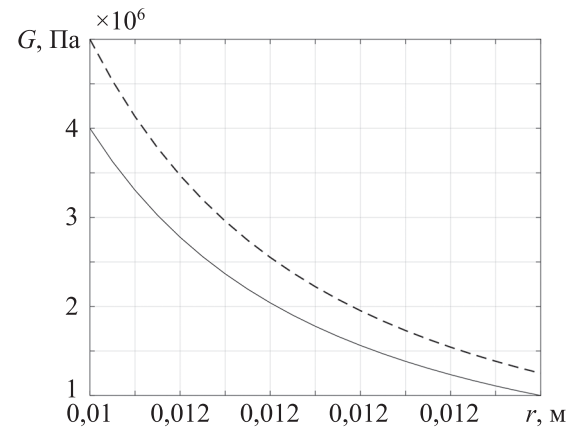


Рис. 7

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мусалимов В. М., Паасуке М., Гапеева Е., Ерелине Я., Ерофеев М. А. Моделирование динамики опорно-двигательной системы // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17, № 6. С. 1159–1166.
2. Мусалимов В. М., Перепелкина С. Ю. Построение зависимостей между параметрами динамических моделей на основе анализа кинематики ходьбы // Сб. тез. докл. на XIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике. 21–25 августа 2023 г. СПб: Политех-Пресс, 2023. Т. 4. С. 86–87.
3. Мусалимов В. М., Ерофеев М. А., Монахов Ю. С., Малов М. С. Моделирование ударно-фрикционного взаимодействия стопы с опорной поверхностью с использованием базиса обобщенных функций Эрмита // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 8. С. 652–659. DOI:10.17586/0021-3454-2023-66-8-652-659.
4. Перепелкин А. И., Мандриков В. Б., Краюшкин А. И., Атрощенко Е. С. Некоторые особенности механических свойств стопы человека // Вестник ВолГМУ. 2016. Вып. 3(59). С. 22–24.
5. Оганесян О. В., Иванников С. В., Коршунов А. В. Восстановление формы и функции голеностопного сустава шарнирно-дистракционными аппаратами. М.: БИНОМ, 2003.
6. Витензон А. С. Закономерности нормальной и патологической ходьбы человека. М.: Зеркало, 1998. 271 с.
7. Скворцов Д. В. Диагностика двигательной патологии инструментальными методами: анализ походки, стабилометрия. М., 2007. 617 с.
8. Каган И. И. Топография, анатомия и оперативная хирургия в терминах, понятиях, классификациях. Оренбург: ОрГМА, 1997. 178 с.
9. Nalam V., Adjei E., and Lee H. Quantification and Modeling of Ankle Stiffness during Standing Balance // IEEE Trans. Biomed. Eng. 2021. Vol. 68, N 6. P. 1828–1837. DOI: 10.1109/TBME.2020.3023328.
10. Roy A., Krebs H. I., Patterson S. L., Judkins T. N., Khanna I., Forrester L. W., Macko R. M., Hogan N. Measurement of Human Ankle Stiffness Using the Anklebot // Proceedings of the 2007 IEEE 10th International Conference on Rehabilitation Robotics. Noordwijk, 12–15 June 2007. DOI: 10.1109/ICORR.2007.4428450.
11. Kato E., Kanehisa H., Fukunaga T., Kawakami Y. Changes in ankle joint stiffness due to stretching: The role of tendon elongation of the gastrocnemius muscle // European Journal of Sport Science. 2010. Vol. 10, N 2. P. 111–119. DOI: 10.1080/17461390903307834.
12. Wind A. M., Rouse E. J. Neuromotor Regulation of Ankle Stiffness is Comparable to Regulation of Joint Position and Torque at Moderate Levels // Sci. Rep. 2020. Vol. 10, N 1. P. 10383. DOI: 10.1038/s41598-020-67135-x.

13. Мусалимов В. М., Перепелкина С. Ю., Гапеева Е., Паасуке М., Ерелине Я., Ерофеев М. А. Количественная оценка и моделирование биомеханических характеристик голеностопного сустава // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики, 2024. Т. 24, № 3. С. 446–454. DOI:10.17586/2226-1494-2024-3-445-454.
14. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

- Виктор Михайлович Мусалимов** — д-р техн. наук, профессор; Институт проблем машиноведения РАН; главн. науч. сотр.; E-mail: musvm@yandex.ru
- Светлана Юрьевна Перепелкина** — канд. техн. наук; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ), Высшая школа автоматизации и робототехники; доцент; E-mail: Svetlana.yu.perepelkina@gmail.com
- Михаил Александрович Ерофеев** — аспирант; Институт проблем машиноведения РАН

Поступила в редакцию 03.06.24; одобрена после рецензирования 11.06.24; принята к публикации 23.08.24.

### REFERENCES

1. Musalimov V.M., Paasuke M., Gapeeva E., Erelina Ya., Erofeev M.A. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, no. 6(17), pp. 1159–1166. (in Russ.)
2. Musalimov V.M., Perepelkina S.Yu. *Tezisy докладov na XIII Vserossiyskom s"yezde po teoreticheskoy i prikladnoy mekhanike* (Abstracts of Reports at the XIII All-Russian Congress on Theoretical and Applied Mechanics), St. Petersburg, 2023, vol. 4, pp. 86–87. (in Russ.)
3. Musalimov V.M., Erofeev M.A., Monakhov Yu.S., Malov M.S. *Journal of Instrument Engineering*, 2023, no. 8(66), pp. 652–659, DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-8-652-659. (in Russ.)
4. Perepelkin A.I., Mandrikov V.B., Krayushkin A.I., Atroschenko E.S. *Journal of Volgograd State Medical University*, 2016, no. 3(59), pp. 22–24. (in Russ.)
5. Oganesian O.V., Ivannikov S.V., Korshunov A.V. *Vosstanovleniye formy i funktsii golenostopnogo sustava sharniro-distraktsionnymi apparatami* (Restoration of the Shape and Function of the Ankle Joint with Hinge-Distraction Devices), Moscow, 2003, 120 p. (in Russ.)
6. Vitenzon A.S. *Zakonomernosti normal'noy i patologicheskoy khod'by cheloveka* (Patterns of Normal and Pathological Human Walking), Moscow, 1998, 271 p. (in Russ.)
7. Skvortsov D.V. *Diagnostika dvigatel'noy patologii instrumental'nymi metodami: analiz pokhodki, stabilometriya* (Diagnostics of Movement Pathology with Instrumental Methods: an Analysis of Gait, Stabilometry), Moscow, 2007, 617 p. (in Russ.)
8. Kagan I.I. *Topografiya, anatomiya i operativnaya khirurgiya v terminakh, ponyatiyakh, klassifikatsiyakh* (Topography, Anatomy and Operative Surgery in Terms, Concepts, Classifications), Orenburg, 1997, 178 p. (in Russ.)
9. Nalam V., Adjei E., and Lee H. *IEEE, Trans. Biomed. Eng.*, 2021, no. 6(68), pp. 1828–1837, DOI: 10.1109/TBME.2020.3023328.
10. Roy A., Krebs H.I., Patterson S.L., Judkins T.N., Khanna I., Forrester L.W., Macko R.M., Hogan N. *Proceedings of the 2007 IEEE 10th International Conference on Rehabilitation Robotics*, Noordwijk, June 12–15, 2007, DOI:10.1109/icorr.2007.4428450.
11. Kato E., Kanehisa H., Fukunaga T., Kawakami Y. *European Journal of Sport Science*, 2010, no. 2(10), pp. 111–119, DOI: 10.1080/17461390903307834.
12. Wind A.M., Rouse E.J. *Sci. Rep.*, 2020, no. 1(10), pp. 10383, DOI: 10.1038/s41598-020-67135-x.
13. Musalimov V.M., Perepelkina S.Yu., Paasuke M.A., Gapeeva E.N., Erelina J.J., Erofeev M.A. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2024, no. 3(24), pp. 520–527, DOI: 10.17586/2226-1494-2024-24-3-520-527. (in Russ.)
14. Timoshenko S.P., Goodyer J. *Teoriya uprugosti* (Theory of Elasticity), Moscow, 1975, 576 p. (in Russ.)

### DATA ON AUTHORS

- Victor M. Musalimov** — Dr. Sci., Professor; Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS; Chief Researcher; E-mail: musvm@yandex.ru
- Svetlana Yu. Perepelkina** — PhD; Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University; Higher School of Automation and Robotics; Associate Professor; E-mail: Svetlana.yu.perepelkina@gmail.com
- Michael A. Erofeev** — Post-Graduate Student; Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS

Received 03.06.24; approved after reviewing 11.06.24; accepted for publication 23.08.24.