

**СИНТЕЗ АЛГОРИТМА РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ДВИЖЕНИЕМ МОБИЛЬНОГО РОБОТА ВДОЛЬ ГЛАДКОЙ ТРАЕКТОРИИ**

Дык Тхинь Хоанг*, А. А. Пыркин

Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия

*hoangducthinh93@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача траекторного управления движением мобильного робота вдоль заданной непрерывной траектории. Математическая модель движения робота может содержать неизвестные параметры, а траектория движения представляет собой произвольную непрерывную кривую с ограниченной кривизной. Приведена нелинейная модель движения робота, преобразование которой к нормальной форме позволило синтезировать робастный регулятор с использованием метода расширенного наблюдателя. Полученный алгоритм управления обеспечивает движение робота вдоль непрерывной траектории с ограниченной в установившемся режиме ошибкой, максимальное значение которой может регулироваться с помощью настроечных параметров.

Ключевые слова: траекторное управление, робастное управление по выходу, расширенный наблюдатель, мобильный колесный робот

Благодарности: работа выполнена при поддержке Президента Российской Федерации, грант № МД-3574.2022.4.

Ссылка для цитирования: Хоанг Дык Тхинь, Пыркин А. А. Синтез алгоритма робастного управления движением мобильного робота вдоль гладкой траектории // Изв. вузов. Приборостроение. 2022. Т. 65, № 7. С. 500—512. DOI: 10.17586/0021-3454-2022-65-7-500-512.

**SYNTHESIS OF AN ALGORITHM FOR ROBUST CONTROL
OF A MOBILE ROBOT MOVEMENT ALONG A SMOOTH TRAJECTORY**

Duc Thinh Hoang*, A. A. Pyrkin

ITMO University, St. Petersburg, Russia

*hoangducthinh93@gmail.com

Abstract. The problem of trajectory control of the movement of a mobile robot along a given continuous trajectory is considered. Mathematical model of the robot's movement may contain unknown parameters, and the movement trajectory is an arbitrary continuous curve with limited curvature. For presented nonlinear model of robot movement, transformation of the model to the normal form allows for synthesizing a robust controller using the extended observer method. The obtained control algorithm ensures the robot movement along a continuous trajectory with an error limited in the steady state, the maximum value of the error can be adjusted using the tuning parameters.

Keywords: trajectory control, robust output-control, extended observer, wheeled mobile robot

Acknowledgments: the work was supported by the President of the Russian Federation, grant N MD-3574.2022.4.

For citation: Hoang Duc Thinh, Pyrkin A. A. Synthesis of an algorithm for robust control of a mobile robot movement along a smooth trajectory. *Journal of Instrument Engineering*. 2022. Vol. 65, N 7. P. 500—512 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2022-65-7-500-512.

Введение. В настоящей статье рассматривается задача траекторного управления движением мобильного робота вдоль заданной траектории [1—5]. Особенность данной задачи заключается в том, что математическая модель движения робота содержит неизвестные параметры, а функция, описывающая траекторию движения, может быть трансцендентной (не имеющей аналитического решения для обратной функции). Предлагается робастный регуля-

тор, основанный на методе расширенного наблюдателя и обеспечивающий решение задачи движения робота вдоль траектории с ограниченной ошибкой, максимальное значение которой может регулироваться с помощью настроечных параметров.

Постановка задачи. Рассматриваются мобильный робот, движущийся на плоскости с координатами $(x(t), y(t))$, и непрерывная траектория, которая может быть представлена в виде гладкой кривой $S: y_s = \varphi(x_s)$, где (x_s, y_s) — координаты некоторой точки, принадлежащей кривой (см. рис. 1).

Допущение 1. Линейная и угловая скорость движения робота ограничены: $|V| \leq V_{\max}$, $|\omega| \leq \omega_{\max}$.

Допущение 2. Максимальная кривизна траектории S во всем ее протяжении ограничена:

$$\varepsilon = \frac{1}{R} \leq \varepsilon_{\max},$$

где ε — кривизна траектории, R — радиус кривизны в точке кривой S .

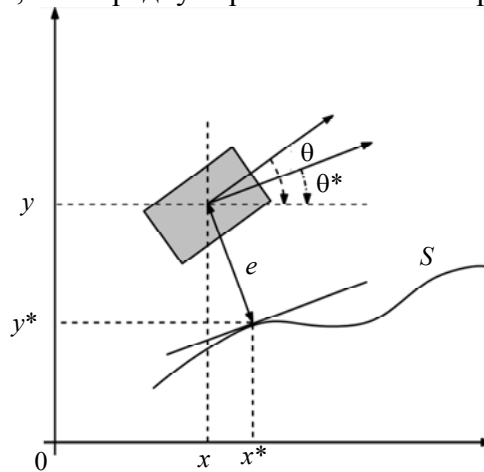


Рис. 1

Положение и ориентация робота на плоскости определяются линейными координатами (x, y) в системе координат, связанной с Землей, и углом рысканья θ .

Кинематическая модель движения робота описывается следующими уравнениями [6, 7]:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где (v_x, v_y) — вектор линейных скоростей робота в абсолютной системе координат, связанный с вектором (V_x, V_y) линейных скоростей робота в продольном и поперечном направлениях движения:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = T(\theta) \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $T(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ — матрица поворота.

Динамическая модель движения робота определяется уравнениями

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_x \\ \dot{V}_y \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_x & 0 & 0 \\ 0 & -a_y & 0 \\ 0 & 0 & -a_\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x & 0 & 0 \\ 0 & b_y & 0 \\ 0 & 0 & b_\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где a_x, a_y, a_ω — инерционные параметры; b_x, b_y, b_ω — параметры, связанные с эффективностью управляющих воздействий, также предполагается, что их значения могут быть неизвестны; F_x, F_y и M — обобщенные продольная и поперечные силы и поворотный момент, действующие на мобильный робот, развиваемые некоторыми движителями.

Требуется разработать алгоритм робастного управления мобильным роботом по измерениям текущих координат x, y , скорости V и ориентации θ , обеспечивающий в условиях параметрической неопределенности ограниченное отклонение от траектории и ошибку по скорости:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| \leq e_{\max}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\delta(t)| \leq \delta_{\max}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |V(t) - V^*| \leq \tilde{V}_{\max}, \quad (4)$$

где $e(t)$ — минимальное расстояние от робота до кривой; $\delta = \theta - \theta^*$ — отклонение угла рысканья θ от угла θ^* , определяющего направление касательной к кривой в ближайшей точке от робота; $e_{\max}, \delta_{\max}, \tilde{V}_{\max}$ — заданные значения допустимых отклонений робота от траектории и скорости; V^* — заданная скорость движения.

Замечание 1. В рамках данной статьи допускается, что регулируемые параметры $e(t)$, $\delta(t)$ вычисляются или оцениваются на основе текущих координат x, y , скорости V и ориентации θ (см., например, [7]).

Модель движения в нормальной форме. Введем в рассмотрение вспомогательную переменную s , определяющую длину пройденного пути, и совместно с расстоянием e запишем модель движения робота вдоль непрерывной кривой [1]:

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta^* & \sin \theta^* \\ -\sin \theta^* & \cos \theta^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Подставим в (5) выражение (2):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta^* & \sin \theta^* \\ -\sin \theta^* & \cos \theta^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta^* - \theta) & \sin(\theta^* - \theta) \\ -\sin(\theta^* - \theta) & \cos(\theta^* - \theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = T(\delta) \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для $\dot{\delta}$ имеем

$$\dot{\delta} = \dot{\theta} - \dot{\theta}^* = \omega - \frac{d\theta^*}{ds} \frac{ds}{dt} = \omega - \varepsilon \dot{s} = \omega - \varepsilon (V_x \cos \delta - V_y \sin \delta),$$

где $\varepsilon = \frac{d\theta^*}{ds}$ — кривизна заданной траектории [1].

Для получения полной модели движения робота вдоль траектории рассмотрим замену координат:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} s \\ e \\ \delta \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ -\varepsilon \cos \delta & \varepsilon \sin \delta & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ \omega \end{bmatrix} \quad (7)$$

и введем обозначения

$$h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma(\delta, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ -\varepsilon \cos \delta & \varepsilon \sin \delta & 1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что матрица $\Sigma(\delta, \varepsilon)$ является невырожденной: $\det \Sigma(\delta, \varepsilon) \equiv 1$. Нетрудно получить выражение для обратной матрицы, определенной, как и матрица $\Sigma(\delta, \varepsilon)$, для всех δ и ε :

$$\Sigma^{-1}(\delta, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \delta & 0 \\ -\sin \delta & \cos \delta & 0 \\ \varepsilon & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Динамическую модель движения робота (3) перепишем в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_x \\ \dot{V}_y \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_x & 0 & 0 \\ 0 & -a_y & 0 \\ 0 & 0 & -a_\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x & 0 & 0 \\ 0 & b_y & 0 \\ 0 & 0 & b_\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{bmatrix} = A\Sigma^{-1}(\delta, \varepsilon)\xi_2 + Bu,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -a_x & 0 & 0 \\ 0 & -a_y & 0 \\ 0 & 0 & -a_\omega \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_x & 0 & 0 \\ 0 & b_y & 0 \\ 0 & 0 & b_\omega \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M \end{bmatrix}.$$

Дифференцируя элементы матрицы $\Sigma(\delta, \varepsilon)$, получаем

$$\dot{\Sigma}(\delta, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \Sigma(\delta, \varepsilon) \dot{\delta} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\varepsilon} & 0 & 0 \end{bmatrix} \Sigma(\delta, \varepsilon) = [P_1(\varepsilon)\dot{\delta} + P_2(\dot{\varepsilon})]\Sigma(\delta, \varepsilon),$$

где

$$P_1(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2(\dot{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\varepsilon} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Дифференцируя (7), получаем

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \dot{\Sigma}(\delta, \varepsilon) \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ \omega \end{bmatrix} + \Sigma(\delta, \varepsilon) \begin{bmatrix} \dot{V}_x \\ \dot{V}_y \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \\ &= [P_1(\varepsilon)\dot{\delta} + P_2(\dot{\varepsilon})]\Sigma(\delta, \varepsilon)\Sigma^{-1}(\delta, \varepsilon)\xi_2 + \Sigma(\delta, \varepsilon)(A\Sigma^{-1}(\delta, \varepsilon)\xi_2 + Bu) = \\ &= [P_1(\varepsilon)\dot{\delta} + P_2(\dot{\varepsilon})]\xi_2 + \Sigma(\delta, \varepsilon)A\Sigma^{-1}(\delta, \varepsilon)\xi_2 + \Sigma(\delta, \varepsilon)Bu. \end{aligned}$$

Таким образом, замена координат (7) позволяет записать нелинейную модель движения мобильного робота вдоль гладкой траектории в нормальной форме:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2; \\ \dot{\xi}_2 &= q(\xi_1, \xi_2, \varepsilon) + g(\xi_1, \varepsilon)u,\end{aligned}$$

где нелинейные преобразования имеют вид

$$\begin{aligned}q(\xi_1, \xi_2, \varepsilon) &= \left[P_1(\varepsilon)h_3^T \xi_2 + P_2(\dot{\varepsilon}) + \Sigma(h_3^T \xi_1, \varepsilon) A \Sigma^{-1}(h_3^T \xi_1, \varepsilon) \right] \xi_2, \\ g(\xi_1, \varepsilon) &= \Sigma(h_3^T \xi_1, \varepsilon) B,\end{aligned}$$

а переменный параметр ε также может быть смоделирован в терминах нормальной формы нелинейной системы как нуль-динамика. В самом деле, изменение этого параметра допустимо при равенстве нулю выходных переменных $e = 0$ и $\delta = 0$.

Введение внутренней модели. Переформулируем цель управления как задачу слежения для измеряемой и регулируемой выходной переменной ξ_1 и задающего воздействия

$$\xi^* = \begin{bmatrix} s^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s^* = s_0^* + V^* t, \quad (8)$$

где желаемый пройденный путь s^* определяется известными значениями пройденного пути s_0^* к моменту запуска управления и желаемой скорости движения V^* и может быть представлен в виде генератора

$$\begin{aligned}s^* &= Hw, \quad \dot{w} = Sw, \\ \text{где } H &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad w(0) = \begin{bmatrix} s_0^* \\ V^* \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Определим переменные отклонений

$$\tilde{\xi}_1 = \xi_1 - h_1 w_1, \quad \tilde{\xi}_2 = \xi_2 - h_1 w_2$$

и модель их динамики

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\xi}}_1 &= \xi_2 - h_1 w_2 = \tilde{\xi}_2, \\ \dot{\tilde{\xi}}_2 &= \dot{\xi}_2 = q(\xi_1, \xi_2, \varepsilon) + g(\xi_1, \varepsilon)u = \bar{q}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \varepsilon, w) + g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon)u\end{aligned}$$

с нелинейным преобразованием

$$\begin{aligned}\bar{q}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \varepsilon, w) &= \left[P_1(\varepsilon)h_3^T (\tilde{\xi}_2 + h_1 w_2) + P_2(\dot{\varepsilon}) + \Sigma(h_3^T \tilde{\xi}_1, \varepsilon) A \Sigma^{-1}(h_3^T \tilde{\xi}_1, \varepsilon) \right] (\tilde{\xi}_2 + h_1 w_2) = \\ &= q(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \varepsilon) + \left[P_1(\varepsilon)h_3^T \tilde{\xi}_2 + P_2(\dot{\varepsilon}) + \Sigma(h_3^T \tilde{\xi}_1, \varepsilon) A \Sigma^{-1}(h_3^T \tilde{\xi}_1, \varepsilon) \right] h_1 w_2.\end{aligned}$$

В идеальном случае необходимо обеспечить $\tilde{\xi}_1 = 0$, $\tilde{\xi}_2 = 0$. Тогда можно найти выражение $\psi(w)$ для управления в установившемся режиме как функцию от задающего воздействия исходя из условия [8—10]

$$0 = q(0, 0, \varepsilon) + \left[P_2(\dot{\varepsilon}) + \Sigma(0, \varepsilon) A \Sigma^{-1}(0, \varepsilon) \right] h_1 w_2 + g(0, \varepsilon)\psi(w),$$

откуда

$$\begin{aligned}\psi(w) &= -g^{-1}(0, \varepsilon) \left[P_2(\dot{\varepsilon}) + \Sigma(0, \varepsilon) A \Sigma^{-1}(0, \varepsilon) \right] h_1 w_2 = \\ &= - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} a_x b_x^{-1} w_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\dot{\varepsilon} b_z^{-1} - \varepsilon a_z b_z^{-1} \right) w_2.\end{aligned} \quad (9)$$

Проанализируем номинальный закон управления (9), обеспечивающий достижение цели управления с нулевой ошибкой в установившемся режиме. Управление в продольном направлении должно быть пропорционально желаемой скорости. В рамках поставленной задачи справедливо соотношение для любого положительного постоянного параметра γ_x :

$$\sigma_x(w) = -\gamma_x^{-1} a_x b_x^{-1} w_2, \quad \dot{\sigma}_x = 0.$$

Опираясь на это свойство, можно сформировать внутреннюю модель по управлению в продольном направлении:

$$\dot{\eta}_x = \bar{u}_x, \quad F_x = \gamma_x \eta_x + \bar{u}_x,$$

где $\bar{u}_x$ — новое управление в продольном направлении (будет определено далее).

В поворотном направлении такого свойства нет, так как параметр ε в общем виде носит переменный характер. Тем не менее заметим, что для прямых участков заданной траектории движения верно $\varepsilon = 0$, а для участков, которые можно описать дугой окружности, справедливо $\varepsilon = \text{const}$ и $\dot{\varepsilon} = 0$. Таким образом, если полагать, что заданная траектория представляет собой композицию прямых и дугообразных участков, то справедливо

$$\sigma_z(w) = \gamma_z^{-1} (\dot{\varepsilon} b_z^{-1} - \varepsilon a_z b_z^{-1}) w_2, \quad \dot{\sigma}_z = 0,$$

и целесообразно рассмотреть внутреннюю модель и в поворотном направлении:

$$\dot{\eta}_z = \bar{u}_z, \quad M = \gamma_z \eta_z + \bar{u}_z,$$

где $\bar{u}_z$ — новое управление в поворотном направлении (будет определено далее), γ_z — положительный параметр.

В поперечном направлении внутренняя модель при такой постановке задачи (без возмущающих воздействий) не обязательна:

$$F_y = \bar{u}_y,$$

где $\bar{u}_y$, наряду с $\bar{u}_x$ и $\bar{u}_z$, будет определено далее.

Рассмотрим вспомогательные переменные

$$\tilde{\eta}_x = \eta_x - \sigma_x(w), \quad \tilde{\eta}_z = \eta_z - \sigma_z(w)$$

и запишем агрегированную модель системы:

$$\dot{\tilde{\eta}}_x = \bar{u}_x,$$

$$\dot{\tilde{\eta}}_z = \bar{u}_z,$$

$$\dot{\tilde{\xi}}_1 = \tilde{\xi}_2,$$

$$\dot{\tilde{\xi}}_2 = \tilde{q}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \varepsilon, w) + g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) \begin{bmatrix} \gamma_x \tilde{\eta}_x \\ 0 \\ \gamma_z \tilde{\eta}_z \end{bmatrix} + g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) \begin{bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \\ \bar{u}_z \end{bmatrix},$$

где

$$\tilde{q}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \varepsilon, w) = \bar{q}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \varepsilon, w) + g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) \begin{bmatrix} \gamma_x \sigma_x(w) \\ 0 \\ \gamma_z \sigma_x(w) \end{bmatrix}.$$

Замечание 2. Важно отметить, что член $\tilde{q}(0, 0, \varepsilon, w)$ тождественно равен нулю в случае $\dot{\varepsilon} = 0$ благодаря выбору функций $\psi(w)$ и $\sigma_{x,z}(w)$ и является соизмеримо малой величиной при относительно малых значениях $\dot{\varepsilon}$.

Выбрав законы управления в виде

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \\ \bar{u}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_x \tilde{\eta}_x \\ 0 \\ -\gamma_z \tilde{\eta}_z \end{bmatrix} + \rho(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \varepsilon, w), \quad (10)$$

где $\rho(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \varepsilon, w) = g^{-1}(\tilde{\xi}_1, \varepsilon)(\tilde{q}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \varepsilon, w) - k_1 \tilde{\xi}_1 - k_2 \tilde{\xi}_2)$ с некоторыми положительными параметрами k_1 и k_2 , получим динамику замкнутой системы в виде двух подсистем:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\eta}}_x = -\gamma_x \tilde{\eta}_x + h_1^T \rho(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \varepsilon, w); \\ \dot{\tilde{\eta}}_z = -\gamma_z \tilde{\eta}_z + h_3^T \rho(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \varepsilon, w); \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\xi}}_1 = \tilde{\xi}_2, \\ \dot{\tilde{\xi}}_2 = -k_1 \tilde{\xi}_1 - k_2 \tilde{\xi}_2. \end{cases} \quad (12)$$

Утверждение 1. Система

$$\dot{X} = \Phi(X, \varepsilon, w)$$

с вектором состояния $X = \text{col}\{\tilde{\eta}_x, \tilde{\eta}_z, \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2\}$ и преобразованием $\Phi(X, \varepsilon, w)$, определенным в (11), (12), является асимптотически устойчивой при условии $\dot{\varepsilon} = 0$, а при $|\dot{\varepsilon}| \leq \mu < \infty$ все траектории системы ограничены областью, зависящей от параметра μ : $X \leq \mathcal{M}_\mu$.

Доказательство. Соответствующий выбор параметров k_1 и k_2 позволяет обеспечить экспоненциальную устойчивость системы (12) и сходимость к нулю переменных $\tilde{\xi}_1$ и $\tilde{\xi}_2$. Благодаря структуре нелинейной функции $\rho(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \varepsilon, w)$ и свойству $\rho(0, 0, \varepsilon, w) = 0$ заключаем, что переменные состояния внутренне устойчивых систем (11) стремятся к нулю. С учетом замечания 1 следует отметить, что при нарушении свойства $\dot{\varepsilon} = 0$ стремление к нулю переменных состояния будет также нарушено, однако система сохранит свойство устойчивости по входу, а переменные состояния будут ограничены, если ограничена переменная $\dot{\varepsilon}$.

Синтез робастного закона управления. Закон управления (10) не всегда может быть реализован, так как зависит от переменных $\tilde{\xi}_2$, w и $\tilde{\eta}_{x,z}$, которые могут быть неизмеряемыми. Здесь такой закон управления будет заменен робастной версией с помощью расширенного наблюдателя [11—14]

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \\ \bar{u}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sat}_N(\hat{u}_x) \\ \text{sat}_N(\hat{u}_y) \\ \text{sat}_N(\hat{u}_z) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{bmatrix} = \bar{G}^{-1}[-k_1 \hat{\xi}_1 - k_2 \hat{\xi}_2 - \sigma_\xi], \quad (14)$$

где $K = [-k_1 \quad -k_2]$, $\hat{\xi} = [\hat{\xi}_1 \quad \hat{\xi}_2]^T$; число N выбирается разработчиком, матрица с постоянными параметрами $\bar{G}$ должна быть невырожденной и выбрана из условия

$$\| (g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) - \bar{G}) \bar{G}^{-1} \|_1 \leq \varrho < 1,$$

где ϱ — число, удовлетворяющее условию $0 < \varrho < 1$, а R^3 -векторы переменных $\hat{\xi}_1$, $\hat{\xi}_2$ и σ_ξ являются состояниями расширенного наблюдателя вида

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \kappa a_2 (\tilde{\xi}_1 - \hat{\xi}_1); \\ \dot{\hat{\xi}}_2 &= \sigma_\xi + \bar{G}\bar{u} + \kappa^2 a_1 (\tilde{\xi}_1 - \hat{\xi}_1), \\ \dot{\sigma}_\xi &= \kappa^3 a_0 (\tilde{\xi}_1 - \hat{\xi}_1)\end{aligned}$$

с настроечными параметрами $(a_0 \ a_1 \ a_2)$ и κ .

Для доказательства устойчивости замкнутой системы рассмотрим вспомогательные переменные

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \kappa^2 (\tilde{\xi}_1 - \hat{\xi}_1); \\ \zeta_2 &= \kappa (\tilde{\xi}_2 - \hat{\xi}_2); \\ \zeta_3 &= \tilde{q}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \varepsilon, w) + g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) \begin{bmatrix} \gamma_x \tilde{\eta}_x \\ 0 \\ \gamma_z \tilde{\eta}_z \end{bmatrix} + (g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) - \bar{G}) \tilde{u}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \sigma_\xi) - \sigma_\xi,\end{aligned}$$

где $\tilde{u}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \sigma_\xi)$ — выражение, полученное из (13), (14) заменой $\hat{\xi}_1$, $\hat{\xi}_2$ на $\tilde{\xi}_1$, $\tilde{\xi}_2$.

Дифференцируя вектор $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, получаем

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= \kappa^2 (\dot{\tilde{\xi}}_1 - \dot{\hat{\xi}}_1) = \kappa^2 (\dot{\tilde{\xi}}_2 - \dot{\hat{\xi}}_2 - \kappa a_2 (\tilde{\xi}_1 - \hat{\xi}_1)) = \kappa (\zeta_2 - a_2 \zeta_1); \\ \dot{\zeta}_2 &= \kappa (\dot{\tilde{\xi}}_2 - \dot{\hat{\xi}}_2) = \\ &= \kappa \left(\tilde{q}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \varepsilon, w) + g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) \begin{bmatrix} \gamma_x \tilde{\eta}_x \\ 0 \\ \gamma_z \tilde{\eta}_z \end{bmatrix} + g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) \begin{bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \\ \bar{u}_z \end{bmatrix} - \sigma_\xi - \bar{G}\bar{u} - \kappa^2 a_1 (\tilde{\xi}_1 - \hat{\xi}_1) \right) = \\ &= \kappa \left(\tilde{q}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \varepsilon, w) + g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) \begin{bmatrix} \gamma_x \tilde{\eta}_x \\ 0 \\ \gamma_z \tilde{\eta}_z \end{bmatrix} + (g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) - \bar{G}) \bar{u} - \sigma_\xi \right) - \kappa^3 a_1 (\tilde{\xi}_1 - \hat{\xi}_1) = \\ &= \kappa \zeta_3 + \kappa (g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) - \bar{G}) (\bar{u}(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \sigma_\xi) - \tilde{u}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \sigma_\xi)) - \kappa a_1 \zeta_1 = \\ &= \kappa (\zeta_3 - a_1 \zeta_1) + \Delta_1,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \kappa (g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) - \bar{G}) (\bar{u}(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \sigma_\xi) - \tilde{u}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \sigma_\xi)); \\ \dot{\zeta}_3 &= \dot{\tilde{q}}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \varepsilon, w) + \dot{g}(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) \begin{bmatrix} \gamma_x \tilde{\eta}_x \\ 0 \\ \gamma_z \tilde{\eta}_z \end{bmatrix} + g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) \begin{bmatrix} \gamma_x \dot{\tilde{\eta}}_x \\ 0 \\ \gamma_z \dot{\tilde{\eta}}_z \end{bmatrix} + \dot{g}(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) \tilde{u} + (g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) - \bar{G}) \dot{\bar{u}} - \dot{\sigma}_\xi = \\ &= \dot{\tilde{q}}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \varepsilon, w) + \dot{g}(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) \begin{bmatrix} \gamma_x \tilde{\eta}_x \\ 0 \\ \gamma_z \tilde{\eta}_z \end{bmatrix} + g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) \begin{bmatrix} \gamma_x \dot{\tilde{\eta}}_x \\ 0 \\ \gamma_z \dot{\tilde{\eta}}_z \end{bmatrix} + \dot{g}(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) \tilde{u} + (g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) - \bar{G}) \dot{\bar{u}} - \kappa a_0 \zeta_1 =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \dot{q}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \varepsilon, w) + \dot{g}(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) \begin{bmatrix} \gamma_x \tilde{\eta}_x \\ 0 \\ \gamma_z \tilde{\eta}_z \end{bmatrix} + g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) \begin{bmatrix} \gamma_x \dot{\tilde{\eta}}_x \\ 0 \\ \gamma_z \dot{\tilde{\eta}}_z \end{bmatrix} + \\
&+ \dot{g}(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) \tilde{u} + (g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) - \bar{G}) J(\tilde{\xi}, \sigma_{\xi}) \bar{G}^{-1} (K \tilde{\xi} - \dot{\sigma}_{\xi}) - \kappa a_0 \zeta_1 = \\
&= \Delta_2 - \dot{\sigma}_{\xi} \Delta_0 - \kappa a_0 \zeta_1 = \Delta_2 - \kappa \Delta_0 a_0 \zeta_1 - \kappa a_0 \zeta_1,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= (g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) - \bar{G}) J(\tilde{\xi}, \sigma_{\xi}) \bar{G}^{-1}; \\
\Delta_2 &= \dot{q}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \varepsilon, w) + \dot{g}(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) \begin{bmatrix} \gamma_x \tilde{\eta}_x \\ 0 \\ \gamma_z \tilde{\eta}_z \end{bmatrix} + g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) \begin{bmatrix} \gamma_x \dot{\tilde{\eta}}_x \\ 0 \\ \gamma_z \dot{\tilde{\eta}}_z \end{bmatrix} + \\
&+ \dot{g}(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) \tilde{u} + (g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon) - \bar{G}) J(\tilde{\xi}, \sigma_{\xi}) \bar{G}^{-1} K \tilde{\xi},
\end{aligned}$$

$J(\tilde{\xi}, \sigma_{\xi})$ — матрица Якоби, составленная путем дифференцирования функций насыщения (13).

Получим модель ошибки оценивания:

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \\ \dot{\zeta}_3 \end{bmatrix} = \kappa \left(\begin{bmatrix} -a_2 I & I & 0 \\ -a_1 I & 0 & I \\ -a_0 I & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \Delta_0 \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \Delta_2$$

и перепишем ее в виде

$$\dot{\zeta} = \kappa (A_{\zeta} - B_{\zeta} C_{\zeta} \Delta_0) \zeta + D_{\zeta} \Delta_1 + B_{\zeta} \Delta_2,$$

где

$$A_{\zeta} = \begin{bmatrix} -a_2 I & I & 0 \\ -a_1 I & 0 & I \\ -a_0 I & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{\zeta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad C_{\zeta}^T = \begin{bmatrix} a_0 I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{\zeta} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Запишем модель замкнутой системы:

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= \Phi(X, \varepsilon, w) + \bar{g}(X, \varepsilon) \Delta_3; \\
\dot{\zeta} &= \kappa (A_{\zeta} - B_{\zeta} C_{\zeta} \Delta_0) \zeta + D_{\zeta} \Delta_1 + B_{\zeta} \Delta_2,
\end{aligned}$$

где $\bar{g}(X, \varepsilon) = g(\tilde{\xi}_1, \varepsilon)$, а Δ_3 означает разницу между реализуемым регулятором (13), (14) и номинальным (10).

Поскольку модель замкнутой системы полностью удовлетворяет условиям утверждения 10.2, приведенного в [15], то полученные выше вычисления являются доказательством следующего утверждения.

Утверждение 2. Существует предел насыщения N , параметры a_0 , a_1 , a_2 и значение κ^* такие, что при $\kappa > \kappa^*$ все траектории замкнутой системы ограничены и соответствуют выполнению цели управления (4).

Численное моделирование. Рассмотрим пример моделирования решения задачи траекторного управления мобильным роботом с использованием предложенного подхода. Заданная гладкая траектория описывается уравнением $y = x + 1 - \cos 2x$ и желаемая скорость движения

робота $V^* = 1$ м/с. Параметры динамической модели движения робота выбираются как $a_x = 1$, $a_y = 1$, $a_\omega = 1$, $b_x = 1$, $b_y = 1$ и $b_\omega = 1$.

Выбираем значения параметров робастного регулятора:

$$K = [-100, -100], \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = 50,$$

$$a_0 = 0,1, \quad a_1 = 4, \quad a_2 = 1, \quad \kappa = 10, \quad \gamma_x = 1, \quad \gamma_z = 1.$$

Результаты моделирования траектории движения мобильного робота приведены на рис. 2. Как видно на графиках, мобильный робот движется вдоль заданной траектории. Предложенный регулятор, используя оценки регулируемых параметров (s, e, δ), обеспечивает ограниченность ошибок по ориентации и боковому отклонению (рис. 3, а, б и 3, в соответственно).

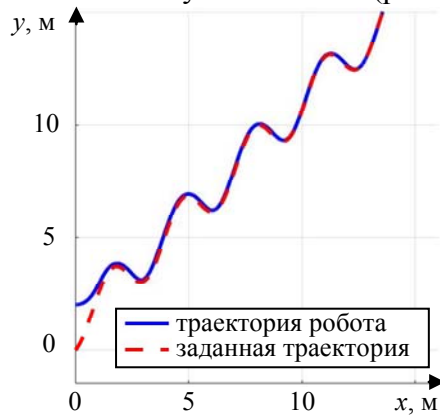


Рис. 2

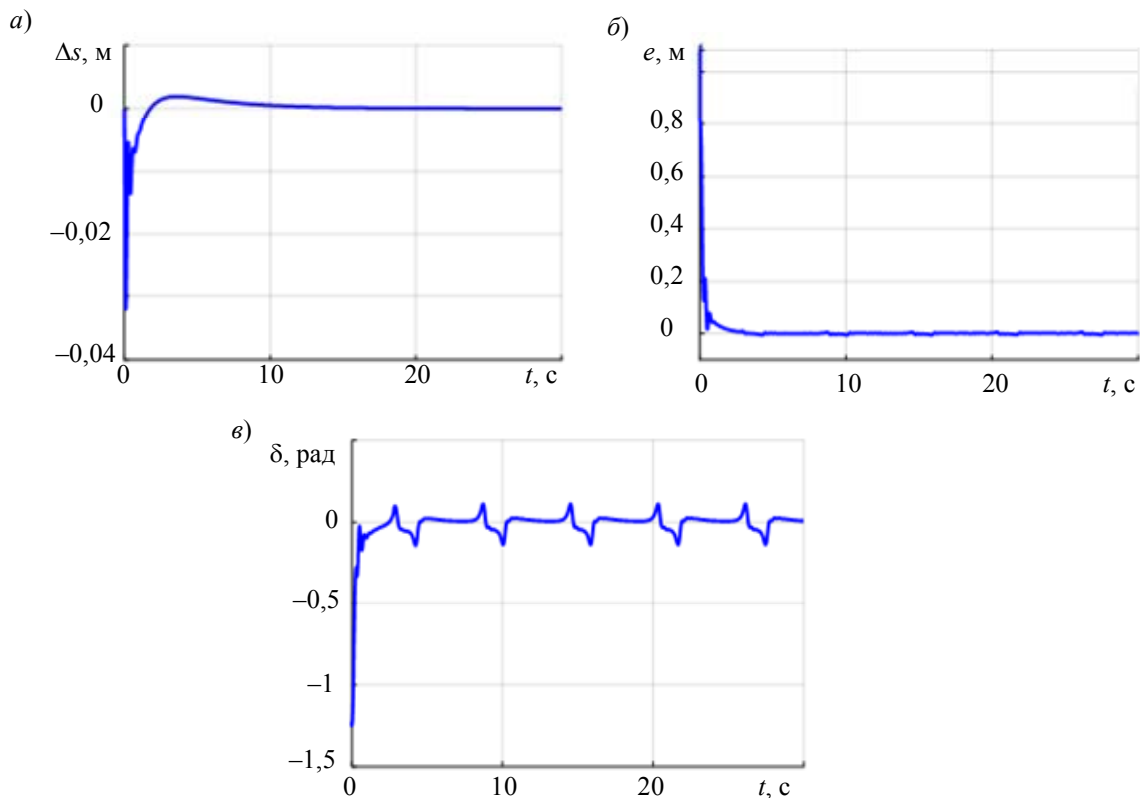


Рис. 3

Рассмотрим второй пример, демонстрирующий реальный случай, когда мобильный робот должен двигаться от точки A до точки D с заданным курсом по заранее запланированной

траектории во избежание столкновения с препятствием. В данном случае траектория задается по четырем ориентирам $A(0,0)$, $B(10,10)$, $C(20,5)$, $D(30,20)$ (рис. 4, а); результат моделирования представлен на рис. 4, б. Из рис. 5 видно, что регулятор обеспечивает нулевую ошибку по продольному (а) и поперечному (б) отклонению от заданной траектории и по углу ориентации (в).

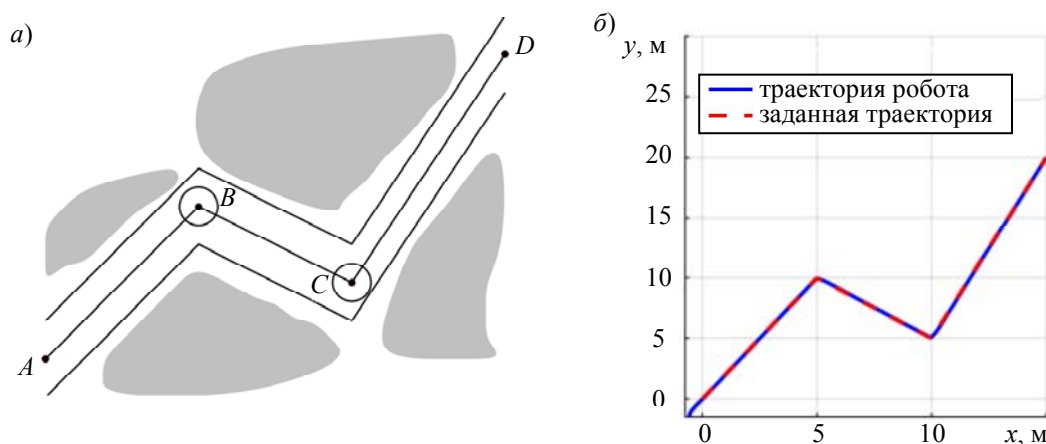


Рис. 4

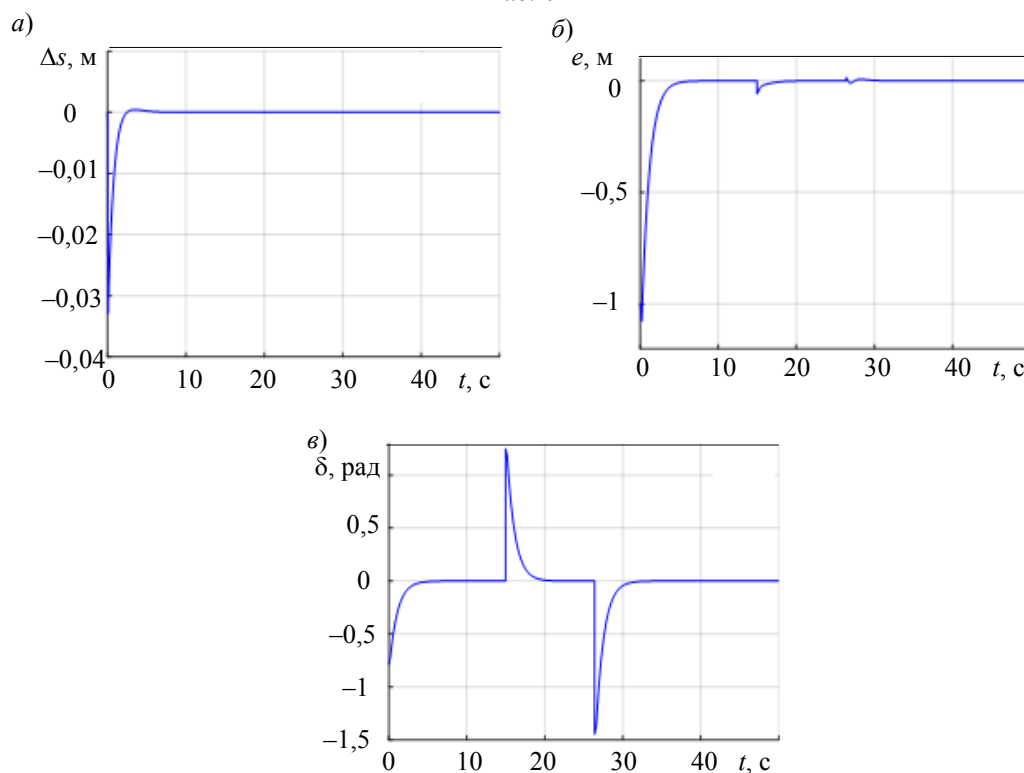


Рис. 5

Заключение. В развитие методов синтеза алгоритмов траекторного управления движением мобильных роботов вдоль заданной непрерывной траектории предположена новая параметризация математической модели движения робота вдоль траектории, позволяющая записать нелинейную модель движения в нормальной форме, на основе которой синтезируется робастный регулятор с использованием метода расширенного наблюдателя. Такой подход позволяет аналитически показать ограничение ошибок регулирования в установившемся режиме при движении робота вдоль траектории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурдаков С. Ф., Мирошник И. В., Стельмаков Р. Э. Системы управления движением колесных роботов. СПб: Наука, 2001. 232 с.
2. Чепинский С. А., Мирошник И. В. Траекторное управление кинематическими механизмами нетривиальной конструкции // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. 2004. № 3 (14). С. 4—10.
3. Капитанюк Ю. А., Чепинский С. А. Управление мобильным роботом по заданной кусочно-гладкой траектории // Гирокоспия и навигация. 2013. № 2. С. 42—52.
4. Miroshnik I. V., Nikiforov V. O. Trajectory motion control and coordination of multilink robots. San-Francisco, 1996. (Prepr. 13th IFAC World Congress).
5. Бушуев А. Б., Исаева Е. Г., Морозов С. Н., Чепинский С. А. Управление траекторным движением многоканальных динамических систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52, № 11. С. 50—56.
6. Хоанг Д. Т., Пыркин А. А. Алгоритм траекторного управления движением мобильного робота без измерения координат положения // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2021. Т. 21, № 6. С. 858—865.
7. Хоанг Дык Тхинь, Пыркин А. А. Траекторное управление мобильным роботом в условиях неопределенности // Изв. вузов. Приборостроение. 2021. Т. 64, № 8. С. 608—619.
8. Borisov O. I., Pyrkin A. A., Isidori A. Application of enhanced extended observer in station-keeping of a quadrotor with unmeasurable pitch and roll angles // IFAC-PapersOnLine. 2019. Vol. 52, N 16. P. 837—842.
9. Borisov O. I., Pyrkin A. A., Isidori A. Robust output regulation of permanent magnet synchronous motors by enhanced extended observer // IFAC-PapersOnLine. 2020. Vol. 53, N 2. P. 4881—4886.
10. Bobtsov A., Pyrkin A., Ortega R., Vukosavic S., Stankovic A., Panteley E. A robust globally convergent position observer for the permanent magnet synchronous motor // Automatica. 2015. N 61. P. 47—54.
11. Freidovich L., Khalil H. Performance recovery of feedback linearization based designs // IEEE Trans. on Automatic Control. 2008. N 53(10). P. 2324—2334.
12. Isidori A., Marconi L., Serrani A. Robust Autonomous Guidance. London: Springer Verlag, 2003.
13. Khalil H. High-Gain Observers in Nonlinear Feedback Control // Advances in Design and Control; Society for Industrial and Applied Mathematics. 2017.
14. Sidori A., Pyrkin A., Borisov O. An extension of a lemma of Dayawansa and its application in the design of extended observers for nonlinear systems // Automatica. 2019. Vol. 106. P. 178—183.
15. Isidori A. Lectures in feedback design for multivariable systems. Basel, Springer Intern. Publ., 2017.

Сведения об авторах

Дык Тхинь Хоанг

— аспирант; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; E-mail: hoangducthinh93@gmail.com

Антон Александрович Пыркин

— д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; E-mail: a.pyrkin@gmail.com

Поступила в редакцию 25.04.22; одобрена после рецензирования 05.05.22; принята к публикации 31.05.22.

REFERENCES

1. Burdakov S.F., Miroshnik I.V., Stel'makov R.E. *Sistemy upravleniya dvizheniyem kolesnykh robotov* (Motion Control Systems for Wheeled Robots), St. Petersburg, 2001, 232 p. (in Russ.)
2. Chepinsky S.A., Miroshnik I.V. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2004, no. 3(14), pp. 4—10. (in Russ.)
3. Kapitanjuk Yu.A., Chepinsky S.A. *Girokopiya i Navigatsiya*, 2013, no. 2, pp. 42—52. (in Russ.)
4. Miroshnik I.V., Nikiforov V.O. *Prepr. 13th IFAC World Congress*, San-Francisco, 1996, V. A., pp. 361—366.
5. Bushuev A.B., Isaeva E.G., Morozov S.N., Chepinsky S.A. *Journal of Instrument Engineering*, 2009, no. 11(52), pp. 50—56. (in Russ.)
6. Hoang D.T., Pyrkin A.A. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2021, no. 6(21), pp. 858—865. (in Russ.)
7. Hoang Duc Thinh, Pyrkin A.A. *Journal of Instrument Engineering*, 2021, no. 8(64), pp. 608—619. (in Russ.)

8. Borisov O.I., Pyrkin A.A., Isidori A. *IFAC-PapersOnLine*, 2019, no. 16(52), pp. 837–842.
9. Borisov O.I., Pyrkin A.A., Isidori A. *IFAC-PapersOnLine*, 2020, no. 2(53), pp. 4881–4886.
10. Bobtsov A., Pyrkin A., Ortega R., Vukosavic S., Stankovic A., and Panteley E. *Automatica*, 2015, no. 61, pp. 47–54.
11. Freidovich L. and Khalil H. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, no. 10(53), pp. 2324–2334.
12. Isidori A., Marconi L., and Serrani A. *Robust Autonomous Guidance*, Springer, London.
13. Khalil H. *High-Gain Observers in Nonlinear Feedback Control*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2017.
14. Sideri A., Pyrkin A., Borisov O. *Automatica*, 2019, vol. 106, pp. 178–183.
15. Isidori A. *Lectures in feedback design for multivariable systems*, Basel, Switzerland, Springer International Publishing, 2017.

Data on authors

- | | | |
|------------------------|---|---|
| Duc Thinh Hoang | — | Post-Graduate Student; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics;
E-mail: hoangducthinh93@gmail.com |
| Anton A. Pyrkin | — | Dr. Sci., Professor; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics;
E-mail: a.pyrkin@gmail.com |

Received 25.04.22; approved after reviewing 05.05.22; accepted for publication 31.05.22.