

ТРОИЧНЫЕ МОДУЛЬНЫЕ КОДЫ С СУММИРОВАНИЕМ
ДЛЯ СИНТЕЗА ЦИФРОВЫХ САМОПРОВЕРЯЕМЫХ УСТРОЙСТВ

Д. В. ЕФАНОВ*

*Российский университет транспорта, Москва, Россия,
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия*
*TrES-4b@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются троичные коды с суммированием, предназначенные для синтеза цифровых самопроверяемых схем, функционирующих в троичной логике и обладающих свойством обнаружения любых не композиционных (при которых число символов каждого вида сохраняется) ошибок в информационных векторах. Приводятся правила построения троичных кодов с суммированием, которые по своим свойствам схожи с бинарным кодом Бергера. Рассматриваются две модификации троичного кода с суммированием — коды с суммированием в кольце вычетов по модулям $\mu=3$ и $\mu=9$ — и некоторые характеристики обнаружения ошибок этими кодами. Показано, что доля необнаруживаемых троичными кодами с суммированием ошибок кратностью d от общего числа ошибок данной кратностью является постоянной величиной, не зависящей от длины информационного вектора.

Ключевые слова: отказоустойчивые и самопроверяемые цифровые устройства и системы, помехоустойчивое и помехозащищенное кодирование, троичные коды с суммированием, троичные модульные коды с суммированием, обнаружение ошибок в информационных векторах, необнаруживаемая ошибка

Ссылка для цитирования: Ефанов Д. В. Троичные модульные коды с суммированием для синтеза цифровых самопроверяемых устройств // Изв. вузов. Приборостроение. 2022. Т. 65, № 5. С. 307—322. DOI: 10.17586/0021-3454-2022-65-5-307-322.

TERNARY MODULAR CODES WITH SUMMATION
FOR THE SYNTHESIS OF DIGITAL SELF-TESTING DEVICES

D. V. Efanov*

*Russian University of Transport, Moscow, Russia
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia*
*TrES-4b@yandex.ru

Abstract. Ternary summation codes with simple construction rules, suitable for the digital self-checking circuits synthesis operating in ternary logic and able of detecting any non-compositional errors in information vectors (when the number of characters of each type is preserved), are considered. Rules for constructing the ternary sum codes, similar in its properties to the Berger binary code, are given. Two modifications of the ternary sum code are described – sum codes in the residues modulo $\mu=3$ and $\mu=9$ ring. Several characteristics of error detection by the codes are described. It is shown that the proportion of errors of multiplicity d , undetectable by binary summation codes, of the total number of errors of the given multiplicity, is a constant value independent of the information vector length.

Keywords: fault-tolerant and self-testing digital devices and systems, noise-resistant and noise-proof coding, ternary codes with summation, error detection in information vectors, undetectable error

Введение. С развитием техники и технологий возрастает актуальность исследований по усовершенствованию принципов представления данных, а также увеличению мощности вычислительных систем наряду с уменьшением их габаритов и повышением скорости выполнения процедур.

Основным способом построения отказоустойчивых и самопроверяемых цифровых устройств и систем является внесение аппаратной и программной избыточности [1—4]. При этом широко применяются методы кодирования и защиты информации [5—7], использование которых позволяет при заданных условиях и ограничениях синтезировать высоконадежные и безопасно функционирующие цифровые устройства, применяемые в современных управляющих комплексах [8]. Микроэлектронные компоненты и типовые блоки цифровых устройств постоянно совершенствуются, повышается их быстродействие, уменьшаются габариты, увеличивается число элементарных единиц, размещаемых на одном кристалле и т.д. [9, 10]. В настоящее время осуществляется реализация транзисторов миниатюрных размеров (достигнута технология 7 нм и менее [11, 12]) и отмечаются возможности создания транзистора с минимальным числом электронов (одним) [13]. В этом случае достигается физический предел реализации данного вида элементов, а значит, требуются и развитие используемых парадигм, и переход к новым формам представления цифровой информации. Одним из таких переходов может стать переход от использования двоичной логики в представлении данных к использованию троичной логики [14]. В мировом научном сообществе более полувека активно обсуждаются вопросы синтеза цифровых устройств и систем, функционирующих по принципам троичной логики. Известны и конкретные реализации подобных систем, отдельных логических элементов и функциональных устройств, к примеру, описанные в [15—18].

Для защиты данных и синтеза надежных цифровых устройств, функционирующих в троичной логике, также применяются методы кодирования [19—21]. Как и для устройств, реализующих принципы двоичной логики, устройства троичной логики могут быть синтезированы с использованием помехоустойчивых и помехозащищенных кодов, принадлежащих к типу блочных равномерных кодов. При этом для ряда задач, например синтеза самотестируемых и самопроверяемых цифровых устройств, могут эффективно использоваться коды, ориентированные на обнаружение ошибок, а не на их исправление. Такие коды имеют меньшую избыточность и соответственно вносят меньшие аппаратные затраты при построении устройства, чем корректирующие коды [22]. Среди кодов с обнаружением ошибок известны композиционные коды (коды с сохранением числа различных уровней цифровых сигналов [23, 24]) и коды с суммированием [25]. Первые коды являются неразделимыми, а вторые — разделимыми. В [26, 27] описаны аналоги классических двоичных кодов Бергера, построенные в трехпозиционной системе, перечислены достоинства и недостатки данных кодов и предлагается рассмотреть коды с суммированием, для которых используется процедура расчета количества уровней цифровых сигналов в кольце вычетов по модулям $\mu=3$ и $\mu=9$. Такие коды можно считать аналогами классических двоичных кодов Боуза — Лина [28, 29].

Цель представленного в настоящей статье исследования — анализ характеристик обнаружения ошибок в информационных векторах троичных модульных кодов с суммированием, учет которых целесообразен при решении задач синтеза отказоустойчивых и самопроверяемых цифровых устройств и систем, функционирующих в троичной логике.

Троичные коды с суммированием. Для представления данных в троичной логике будем использовать символы из множества $\{0, 1, 2\}$, при этом ориентируясь не на какую-либо из троичных систем счисления, а полагая, что элементарное устройство характеризуется

тремя состояниями (один трит данных кодируется тремя различными способами). Например, 6-битный вектор может быть представлен последовательностью числовых значений $\langle 011201 \rangle$.

Введем следующие характеристики троичных кодовых векторов: r_1 — число разрядов кодового вектора, принимающих значение 1, и r_2 — число разрядов кодового вектора, принимающих значение 2. Очевидно, что число разрядов кодового вектора длиной m , принимающих значение 0, определяется как разность: $m - r_1 - r_2$. Для приведенного примера кодового вектора $r_1=3$ и $r_2=1$.

Зная параметры r_1 и r_2 , можно, например, получить все кодовые векторы, принадлежащие композиционному коду $C_m^{r_1, r_2}$. Число кодовых векторов с одинаковой композицией чисел 1 и 2 (с одинаковыми r_1 и r_2) определяется величиной $C_m^{r_1} C_{m-r_1}^{r_2}$, где первый множитель определяет количество вариантов расположений в информационном векторе разрядов, равных 1, а второй — разрядов, равных 2 (количество вариантов расположений разрядов, равных 0, определяется однозначно и равно $C_{m-r_1-r_2}^{m-r_1-r_2} = 1$). Для кода $C_6^{3,1}$ мощность множества кодовых слов определяется величиной $C_6^3 C_3^1 = 20 \cdot 3 = 60$.

В классических кодах с суммированием (обозначим их как Σ_m -коды) всем информационным кодовым векторам с одинаковыми числами r_1 и r_2 соответствуют одинаковые контрольные векторы [26, 27]. Другими словами, для построения Σ_m -кода необходимо определить числа r_1 и r_2 , записать их в троичном виде и расположить последовательно в разрядах контрольных векторов. Так как максимальные значения чисел r_1 и r_2 равны $r_1=r_2=m$, то для представления каждого из них в троичном виде требуется по $\lceil \log_3(m+1) \rceil$ разрядов (запись $\lceil \dots \rceil$ обозначает целое сверху от вычисляемого значения). Избыточность Σ_m -кода, таким образом, равна $k = 2 \lceil \log_3(m+1) \rceil$. Для 6-битного информационного вектора, например, избыточность определяется числом $k=4$ (так, если $m=100$, то $k=10$).

Указанные особенности построения Σ_m -кодов позволяют наделить их определенными свойствами обнаружения ошибок в информационных векторах — свойством обнаружения ошибок определенной кратностью и конкретного вида. Под кратностью d ошибки понимается число искажаемых разрядов, а вид определяется совокупностью числа искажений разрядов, равных 0, 1 и 2.

Ошибки по видам классифицируются на монотонные и немонотонные, а последние, в свою очередь, на композиционные и асимметричные [28, 29]. Такая классификация вытекает из принципов применения избыточного кодирования для построения цифровых устройств — использования особенностей обнаружения ошибок для их идентификации в вычислениях данных устройствами. Монотонная ошибка в троичном кодовом векторе — это ошибка, при которой сохраняется приоритет значений, определенный в каждом из известных классов троичных монотонных функций. Известно [30], что в троичной логике имеется три класса монотонных функций (классы M_1 , M_2 и M_3). Класс M_1 — монотонные функции, для которых при сравнении аргументов принят порядок $0 < 1 < 2$. Класс M_2 — монотонные функции, для которых при сравнении аргументов принят порядок $1 < 2 < 0$. Класс M_3 — монотонные функции, для которых при сравнении аргументов принят порядок $2 < 0 < 1$. Монотонные ошибки в троичных кодовых векторах могут быть классифицированы на подвиды (однонаправленная, двунаправленная и др.). Немонотонная ошибка — это ошибка, при которой приоритет значений, определенный в каждом из известных классов троичных монотонных функций, не сохраняется. Среди немонотонных ошибок выделяется класс композиционных ошибок — ошибок, при которых сохраняются числа r_1 и r_2 . Например, все ошибки данного класса не будут

обнаружены Σ_m -кодами. Если же композиция чисел 1 и 2 нарушается при ошибке, то такая ошибка называется асимметричной (для асимметричных ошибок, так же как и для монотонных, могут быть выделены подвиды).

Σ_m -коды обнаруживают любые монотонные и асимметричные ошибки, но не обнаруживают любые композиционные ошибки [26, 27]. При этом число k для них зависит от m и при малой длине информационного вектора существенно. В целях уменьшения избыточности кода и сохранения постоянным числа k при любых m могут быть использованы принципы модулярной арифметики — вычисления параметров r_1 и r_2 в кольце вычетов по заранее установленному модулю μ . Эффективным является применение модулей из множества $\mu \in \{3^1, 3^2, \dots, 3^{\lceil \log_3(m+1) \rceil - 1}\}$. В этом случае используются все возможные варианты построения контрольных векторов. Коды с суммированием, для которых используется операция суммирования в кольце вычетов по модулю μ , обозначим как Σ_m^μ -коды и далее будем называть модульными кодами с суммированием. Модульные коды с суммированием не обнаруживают все композиционные ошибки и некоторые монотонные и асимметричные ошибки.

Особенности обнаружения ошибок троичными модульными кодами с суммированием. Для анализа характеристик обнаружения ошибок в информационных векторах кодами с суммированием предварительно производится их разбиение на группы, соответствующие одинаковым контрольным векторам (контрольные группы) [31]. Затем анализируются переходы между каждой парой векторов, входящих в одну и ту же контрольную группу, что позволяет определить кратность необнаруживаемой ошибки и ее вид. Рассмотрим распределение информационных векторов на контрольные группы для Σ_4^3 -кода (табл. 1).

Таблица 1

Контрольные группы, $r_1(\text{mod}3)-r_2(\text{mod}3)$								
0-0	0-1	0-2	1-0	1-1	1-2	2-0	2-1	2-2
Информационные векторы								
0000	0002 0020 0200 2000	0022 0202 0220 2002 2020 2200	0001 0010 0100 1000	0012 0021 0102 0120 0201 0210 1002 1020 1200 2001 2010 2100	0122 0212 0221 1012 1021 1022 1202 1220 2012 2021 2201 2210	0011 0101 0110 1001 1010 1100	0112 0121 0211 0221 1012 1102 1120 1201 1210 2011 2101 2110	1122 1212 1221 2112 2121 2211
0111 1011 1101 1110 0222 2022 2202 2220	2222 1112 1121 1211 2111		1111 1222 2122 2212 2221					

Контрольные группы соответствуют всем возможным комбинациям чисел $r_1(\text{mod}3)$ и $r_2(\text{mod}3)$. В таблице каждая контрольная группа выделена как $r_1(\text{mod}3)-r_2(\text{mod}3)$ -группа. Для простоты изложения далее обозначим числа $r_1(\text{mod}\mu)$ и $r_2(\text{mod}\mu)$ как a и b соответственно, а группы — как a - b -группы. В таблице информационные векторы распределены не только по контрольным группам, но и выделены две категории векторов (верхняя и нижняя части таб-

лицы): в верхней части указаны информационные векторы, для которых $r_1=r_1(\text{mod}3)$ и $r_2=r_2(\text{mod}3)$, в нижней — векторы, для которых эти равенства нарушаются. Между информационными векторами одной контрольной группы, но принадлежащими только верхней или только нижней части таблицы, возможно возникновение лишь композиционной ошибки, тогда как между векторами одной контрольной группы, но принадлежащими разным частями таблицы, возникают монотонные и асимметричные ошибки. Таким образом, любой модульный троичный код с суммированием не будет обнаруживать любые композиционные ошибки в информационных векторах, а также некоторую долю монотонных и асимметричных ошибок. Число ошибок, не обнаруживаемых Σ_4^3 -кодом, по сравнению с числом ошибок, не обнаруживаемых немодульным кодом с суммированием, увеличится, но при этом число контрольных разрядов не будет зависеть от длины информационного вектора и будет постоянным для выбранного значения модуля μ .

Анализируя табличную форму задания Σ_m^μ -кода, можно вычислить общее количество необнаруживаемых ошибок по видам и кратностям. Для расчета требуется определить число контрольных групп и состав информационных векторов в них. Число контрольных групп определяется значением модуля μ . Для чисел r_1 и r_2 существуют только наименьшие неотрицательные вычеты из множества $\{0, 1, \dots, \mu-1\}$. Мощность данного множества равна μ . Таким образом, общее число контрольных групп определяется величиной μ^2 . К примеру, в рассматриваемом случае (см. табл. 1) имеется $3^2 = 9$ контрольных групп. Необходимо заметить, что для кодов с различными значениями m и μ часть контрольных групп могут оказаться пустыми. Общее число необнаруживаемых Σ_m^μ -кодом ошибок определяется как

$$N_{m,k} = \sum_{a=0, b=0}^{a=\mu-1, b=\mu-1} N_{a-b}, \quad (1)$$

где N_{a-b} — число необнаруживаемых ошибок в контрольной группе $a-b$, для расчета которого необходимо определить число Q_{a-b} — общее количество информационных векторов в контрольной группе:

$$Q^*_{a-b} = Q_{a-b}(Q_{a-b} - 1). \quad (2)$$

Как отмечено выше, количество информационных векторов с одинаковыми числами r_1 и r_2 равно $C_m^{r_1} C_{m-r_1}^{r_2}$. При этом указанная величина определяет общее число информационных векторов только в том случае, когда рассчитываются числа r_1 и r_2 , а не вычеты для них $r_1(\text{mod}\mu)$ и $r_2(\text{mod}\mu)$. Можно сказать, что в данном случае речь идет о Σ_m -коде, а не о Σ_m^μ -коде. Однако Σ_m^μ -код напрямую получается из Σ_m -кода с такой же длиной информационного вектора. Например, в табл. 1 задан Σ_4^3 -код, который получен из Σ_4 -кода. Все векторы нижней части таблицы — это контрольные группы Σ_4 -кода, смещенные из групп r_1-r_2 в группы $r_1(\text{mod}\mu)-r_2(\text{mod}\mu)$. Когда определяется вычет для одного из чисел r_1 и r_2 , превышающего величину $\mu-1$, то все информационные векторы для группы r_1-r_2 окажутся в группе $r_1(\text{mod}\mu)-r_2(\text{mod}\mu)$. К примеру, в табл. 2 рассмотрена часть распределения информационных векторов для $r_1 < \mu$ (в этом случае $r_1(\text{mod}\mu)=r_1$) и произвольных r_2 . Все информационные векторы в группах $r_1-0+i, r_1-\mu+i, r_1-2\mu+i, \dots, i \in \{0, 1, \dots, \mu-1\}$, Σ_m -кода оказываются в одной контрольной группе Σ_m^μ -кода. Число информационных векторов в контрольной группе равно

$$Q_{r_1-r_2(\text{mod}\mu)} = C_m^{r_1} C_{m-r_1}^{0+i} + C_m^{r_1} C_{m-r_1}^{\mu+i} + C_m^{r_1} C_{m-r_1}^{2\mu+i} \dots + C_m^{r_1} C_{m-r_1}^{\lfloor m/\mu \rfloor \mu+i}, \quad i \in \{0, 1, \dots, \mu-1\}, \quad (3)$$

либо иначе:

$$Q_{r_1-r_2(\text{mod } \mu)} = \sum_{j=0}^{j=\lfloor m/\mu \rfloor} C_m^{r_1} C_{m-r_1}^{j\mu+i}, \quad i \in \{0, 1, \dots, \mu-1\}, \quad (4)$$

Аналогично получается выражение для контрольных групп $r_1(\text{mod } \mu)=r_2, r_2 < \mu$. Для произвольной группы $a-b$ выражение для расчета общего числа информационных векторов имеет следующий вид:

$$Q^*_{a-b} = \sum_{j_1=0, j_2=0}^{j_1=\lfloor m/\mu \rfloor, j_2=\lfloor m/\mu \rfloor} C_m^{j_1\mu+i_1} C_{m-j_1\mu+i_1}^{j_2\mu+i_2}, \quad i_1, i_2 \in \{0, 1, \dots, \mu-1\}, \quad (5)$$

где $i_1 = r_1(\text{mod } \mu)$ и $i_2 = r_2(\text{mod } \mu)$.

К примеру, для Σ_4^3 -кода формула (5) дает:

$$Q^*_{a-b} = \sum_{j_1=0, j_2=0}^{j_1=1, j_2=1} C_4^{3j_1+i_1} C_{4-3j_1+i_1}^{3j_2+i_2} = C_4^{i_1} C_{4+i_1}^{i_2} + C_4^{i_1} C_{4+i_1}^{3+i_2} + C_4^{3+i_1} C_{1+i_1}^{i_2} + C_4^{3+i_1} C_{1+i_1}^{3+i_2}, \quad i_1, i_2 \in \{0, 1, 2\}.$$

Для группы 0-1 имеем

$$C_4^0 C_4^1 + C_4^0 C_4^4 + C_4^3 C_4^1 = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 9.$$

Первый множитель определяет число информационных векторов с сочетанием чисел 0-1, второй – с сочетанием чисел 0-4 и третий – с сочетанием 3-1.

Таблица 2

r_1-r_2												
r_1-0	r_1-1	...	$r_1-\mu-1$	$r_1-\mu$	$r_1-\mu+1$...	$r_1-2\mu-1$...	$r_1-\lfloor m/\mu \rfloor \mu$	$r_1-\lfloor m/\mu \rfloor \mu+1$...	r_1-m
$C_m^{r_1} C_{m-r_1}^0$	$C_m^{r_1} C_{m-r_1}^1$...	$C_m^{r_1} C_{m-r_1}^{\mu-1}$	$C_m^{r_1} C_{m-r_1}^{\mu}$	$C_m^{r_1} C_{m-r_1}^{\mu+1}$...	$C_m^{r_1} C_{m-r_1}^{2\mu-1}$...	$C_m^{r_1} C_{m-r_1}^{\lfloor m/\mu \rfloor \mu}$	$C_m^{r_1} C_{m-r_1}^{\lfloor m/\mu \rfloor \mu+1}$...	$C_m^0 C_m^m$

Вычисления по формулам (1), (2) и (5) позволяют определить общее количество необнаруживаемых ошибок троичными модульными кодами с суммированием. Для расчета числа необнаруживаемых ошибок по кратностям требуется более глубокий анализ.

Процедура анализа табличной формы задания троичных кодов с суммированием была автоматизирована, что позволило определить характеристики обнаружения ошибок Σ_m -, Σ_m^9 - и Σ_m^3 -кодами с длиной информационных векторов $m=3...11$ (табл. 3—5 соответственно). Расчеты с большими значениями m весьма затруднены, так как осуществляется множество сравнений троичных чисел. Несмотря на это, уже по полученным значениям можно установить некоторые закономерности.

Данные в табл. 3—5 получены следующим образом. Для каждого модульного кода с суммированием с заданной длиной информационного вектора сформированы таблицы, содержащие классификацию полного множества информационных векторов по группам контрольных векторов (по аналогии с табл. 1 и 2). Далее определены все возможные переходы информационных векторов друг в друга внутри каждой контрольной группы и вычислены кодовые расстояния между векторами, соответствующие кратностям d необнаруживаемых ошибок. Полученные значения суммировались по каждой контрольной группе и по каждой кратности. В табл. 3—5 для каждого значения m в 1-й строке представлено общее количество необнаруживаемых ошибок модульными кодами с суммированием по кратностям; во 2-й строке — общее количество возможных ошибок каждой кратностью; в 3-й строке указаны доли необнаруживаемых ошибок кратностью d в информационных векторах от общего числа ошибок данной кратностью (величина β_d , %).

Таблица 3

m	d										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	0	54	12	-	-	-	-	-	-	-	-
	162	324	216								
	0	16,66667	5,55556								
4	0	324	144	90	-	-	-	-	-	-	-
	648	1944	2592	1296							
	0	16,66667	5,55556	6,94444							
5	0	1620	1080	360	-	-	-	-	-	-	-
	2430	9720	19440	7776							
	0	16,66667	5,55556	4,62963							
6	0	7290	6480	2040	-	-	-	-	-	-	-
	8748	43740	116640	46656							
	0	16,66667	5,55556	4,37243							
7	0	30618	34020	85050	-	-	-	-	-	-	-
	30618	183708	612360	979776							
	0	16,66667	5,55556	6,94444							
8	0	122472	163296	510300	-	-	-	-	-	-	-
	104976	734832	2939328	7348320							
	0	16,66667	5,55556	6,94444							
9	0	472392	734832	2755620	-	-	-	-	-	-	-
	354294	2834352	13226976	39680928							
	0	16,66667	5,55556	6,94444							
10	0	1771470	3149280	13778100	-	-	-	-	-	-	-
	1180980	10628820	56687040	198404640							
	0	16,66667	5,55556	6,94444							
11	0	6495390	12990780	64953900	-	-	-	-	-	-	-
	3897234	38972340	233834040	935336160							
	0	16,66667	5,55556	6,94444							

Таблица 4

m	d										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	0	54	12								
	162	324	216								
	0	16,66667	5,55556								
4	0	324	144	90							
	648	1944	2592	1296							
	0	16,66667	5,55556	6,94444							
5	0	1620	1080	1350	360						
	2430	9720	19440	19440	7776						
	0	16,66667	5,55556	6,94444	4,62963						
6	0	7290	6480	12150	6480	2040					
	8748	43740	116640	174960	139968	46656					
	0	16,66667	5,55556	6,94444	4,62963	4,37243					
7	0	30618	34020	85050	68040	42840	10080				
	30618	183708	612360	1224720	1469664	979776	279936				
	0	16,66667	5,55556	6,94444	4,62963	4,37243	3,60082				
8	0	122472	163296	510300	544320	514080	241920	54810			
	104976	734832	2939328	7348320	11757312	11757312	6718464	1679616			
	0	16,66667	5,55556	6,94444	4,62963	4,37243	3,60082	3,26325			
9	0	472392	734832	2755620	3674160	4626720	3265920	1479870	290646		
	354294	2834352	13226976	39680928	79361856	105815808	90699264	45349632	10077696		
	0	16,66667	5,55556	6,94444	4,62963	4,37243	3,60082	3,26325	2,88405		
10	0	1771470	3149280	13778100	22044960	34700400	32659200	22198050	8719380	1588896	
	1180980	10628820	56687040	198404640	476171136	793618560	906992640	680244480	302330880	60466176	
	0	16,66667	5,55556	6,94444	4,62963	4,37243	3,60082	3,26325	2,88405	2,62774	
11	0	6495390	12990780	64953900	121247280	229022640	269438400	244178550	143869770	52433568	8689626
	3897234	38972340	233834040	935336160	2618941248	5237882496	7482689280	7482689280	4988459520	1995383808	362797056
	0	16,66667	5,55556	6,94444	4,62963	4,37243	3,60082	3,26325	2,88405	2,62774	2,39518

Таблица 5

m	d											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
3	0	54	18									
	162	324	216	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	0	16,66667	8,33333									
4	0	324	216	162								
	648	1944	2592	1296	-	-	-	-	-	-	-	-
	0	16,66667	8,33333	12,5								
5	0	1620	1620	2430	810							
	2430	9720	19440	19440	7776	-	-	-	-	-	-	-
	0	16,66667	8,33333	12,5	10,41667							
6	0	7290	9720	21870	14580	5346						
	8748	43740	116640	174960	139968	46656	-	-	-	-	-	-
	0	16,66667	8,33333	12,5	10,41667	11,45833						
7	0	30618	51030	153090	153090	112266	30618					
	30618	183708	612360	1224720	1469664	979776	279936	-	-	-	-	-
	0	16,66667	8,33333	12,5	10,41667	11,45833	10,9375					
8	0	122472	244944	918540	1224720	1347192	734832	188082				
	104976	734832	2939328	7348320	11757312	11757312	6718464	1679616	-	-	-	-
	0	16,66667	8,33333	12,5	10,41667	11,45833	10,9375	11,19792				
9	0	472392	1102248	4960116	8266860	12124728	9920232	5078214	1115370			
	354294	2834352	13226976	39680928	79361856	105815808	90699264	45349632	10077696	-	-	-
	0	16,66667	8,33333	12,5	10,41667	11,45833	10,9375	11,19792	11,06771			
10	0	1771470	4723920	24800580	49601160	90935460	99202320	76173210	33461100	6731586		
	1180980	10628820	56687040	198404640	476171136	793618560	906992640	680244480	302330880	60466176	-	-
	0	16,66667	8,33333	12,5	10,41667	11,45833	10,9375	11,19792	11,06771	11,13281		
11	0	6495390	19486170	116917020	272806380	600174036	818419140	837905310	552108150	222142338	40271418	
	3897234	38972340	233834040	935336160	2618941248	5237882496	7482689280	7482689280	4988459520	1995383808	362797056	-
	0	16,66667	8,33333	12,5	10,41667	11,45833	10,9375	11,19792	11,06771	11,13281	11,10026	

Анализ таблиц позволяет вывести следующую закономерность.

Теорема. Значение показателя β_d , характеризующего долю необнаруживаемых троичными кодами с суммированием ошибок кратностью d в информационных векторах от общего числа ошибок данной кратностью, не зависит от длины информационного вектора и является постоянным для любого кода с заданным модулем μ .

Эта теорема характеризует как Σ_m -коды, так и Σ_m^μ -коды, однако подтверждается только расчетами и математического доказательства к настоящему времени не имеет.

В табл. 6 представлены значения показателя β_d для трех рассмотренных кодов, а на рис. 1 графически проиллюстрированы зависимости $\beta_d(d)$ для Σ_m^3 - и Σ_m^9 -кодов. Для Σ_m -кодов график не представлен, так как для $d=2\dots 8$ он совпадает с графиком для Σ_m^9 -кодов, а при $d \geq 9$ значения β_d в рассмотренном диапазоне кратностей ошибок отличаются не существенно.

Таблица 6

d	$\beta_d, \%$		
	Σ_m -коды	Σ_m^9 -коды	Σ_m^3 -коды
2	16,66667	16,66667	16,66667
3	5,55556	5,55556	8,33333
4	6,94444	6,94444	12,5
5	4,62963	4,62963	10,41667
6	4,37243	4,37243	11,45833
7	3,60082	3,60082	10,9375
8	3,26325	3,26325	11,19792
9	2,88399	2,88405	11,06771
10	2,62685	2,62774	11,13281
11	2,39152	2,39518	11,10026

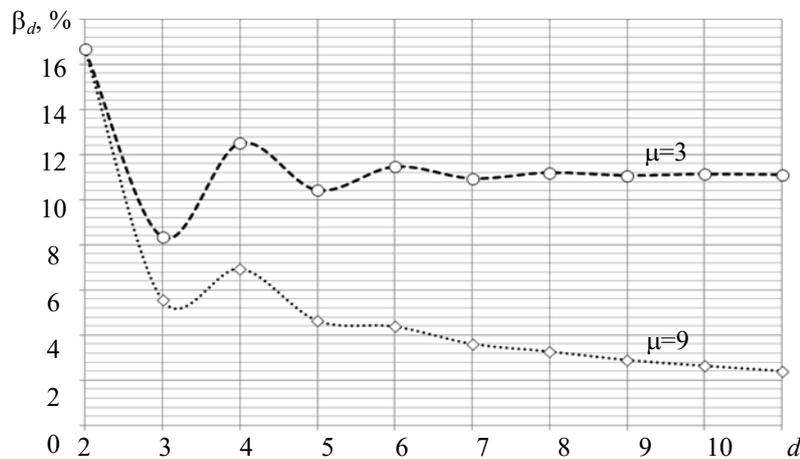


Рис. 1

Для рассматриваемых кодов значения β_2 совпадают (не обнаруживается примерно каждая 6-я двукратная ошибка в информационных векторах); значения же β_3 совпадают только для Σ_m - и Σ_m^9 -кодов (примерно каждая 18-я трехкратная ошибка не будет обнаружена); для Σ_m^3 -кодов примерно каждая 12-я трехкратная ошибка данными кодами не обнаруживается. Для $d \geq 4$ значение показателя β_d находится в диапазоне 10...12 % для Σ_m^3 -кодов и 2...7 % для Σ_m^9 - и Σ_m -кодов.

В отличие от бинарных аналогов [32] значения показателя β_d у троичных кодов гораздо ниже (ср.: данные табл. 6 с данными для бинарных модульных кодов с суммированием, например из работы [33]). Это объясняется большим количеством информационных векторов

заданной длиной m , строящихся в троичной логике, чем в двоичной логике. Наличие же ошибок нечетной кратностью объясняется используемыми значениями модулей $\mu \in \{3^1, 3^2, \dots, 3^{\lceil \log_3(m+1) \rceil - 1}\}$. В таблице задания кода в одной и той же контрольной группе формируются информационные векторы, для которых $r_1(\text{mod } \mu)$ или $r_2(\text{mod } \mu)$ при разных значениях r_1 или r_2 имеют различную четность.

Рассмотрим еще два показателя обнаружения ошибок троичными кодами с суммированием.

Первый показатель характеризует долю необнаруживаемых ошибок от общего числа ошибок в информационных векторах:

$$\gamma_{m,k} = \frac{N_{m,k}}{N_m} \cdot 100\%. \quad (6)$$

Второй показатель характеризует близость рассматриваемого кода к коду с наименьшим возможным числом необнаруживаемых ошибок при заданных значениях m и k [34, 35]:

$$\xi_{m,k} = \frac{N_{m,k}^{\min}}{N_{m,k}} \cdot 100\% = \frac{3^m (3^{m-k} - 1)}{N_{m,k}} \cdot 100\%. \quad (7)$$

Чем значение показателя $\gamma_{m,k}$ меньше и ближе к нулю, тем эффективнее код обнаруживает ошибки в информационных векторах; чем значение показателя $\xi_{m,k}$ выше и ближе к 100 %, тем эффективнее в рассматриваемом коде используются контрольные разряды.

В табл. 7 представлены абсолютные показатели обнаружения общего числа ошибок троичными кодами с суммированием, а в табл. 8 — относительные.

Таблица 7

m	N_m	Σ_m -коды		Σ_m^9 -коды		Σ_m^3 -коды	
		$N_{m,k}$	$N_{m,k}^{\min}$	$N_{m,k}$	$N_{m,k}^{\min}$	$N_{m,k}$	$N_{m,k}^{\min}$
3	702	66	—	66	—	72	54
4	6480	558	0	558	0	702	648
5	58806	4410	486	4410	486	6480	6318
6	530712	34440	5832	34440	5832	58806	58320
7	4780782	270648	56862	270648	56862	530712	529254
8	43040160	2151198	524880	2151198	524880	4780782	4776408
9	387400806	17300154	511758	17300160	4763286	43040160	43027038
10	3486725352	140609016	4723920	140609736	42987672	387400806	387361440
11	31380882462	1153285848	42869574	1153319904	387243342	3486725352	3486607254

Таблица 8

m	$\gamma_{m,k}, \%$			$\xi_{m,k}, \%$		
	Σ_m -коды	Σ_m^9 -коды	Σ_m^3 -коды	Σ_m -коды	Σ_m^9 -коды	Σ_m^3 -коды
3	9,40171	9,40171	10,25641	—	—	75
4	8,61111	8,61111	10,83333	0	0	92,30769
5	7,49923	7,49923	11,01928	11,02041	11,02041	97,5
6	6,4894	6,4894	11,08059	16,9338	16,9338	99,17355
7	5,66117	5,66117	11,10095	21,00958	21,00958	99,72527
8	4,99812	4,99812	11,10772	24,39943	24,39943	99,90851
9	4,4657	4,4657	11,10998	2,95811	27,53319	99,96951
10	4,0327	4,03272	11,11073	3,35961	30,57233	99,98984
11	3,67512	3,67523	11,11099	3,71717	33,5764	99,99661

С увеличением длины информационного вектора от $m=3$ к $m=11$ значения показателя $\gamma_{m,k}$ для Σ_m^9 - и Σ_m -кодов уменьшаются от $\approx 9,4\%$ к величине $\approx 3,68\%$, значение же показателя $\gamma_{m,k}$ для Σ_m^3 -кодов возрастает до $11,1\%$ — примерно эта величина является предельной для Σ_m^3 -кодов и равна $\mu^{-2} \cdot 100\%$, для Σ_m^9 -кодов данная величина равна $\mu^{-3} \cdot 100\%$. Особенности изменения показателя $\gamma_{m,k}$ для троичных модульных кодов с суммированием иллюстрируются рис. 2.

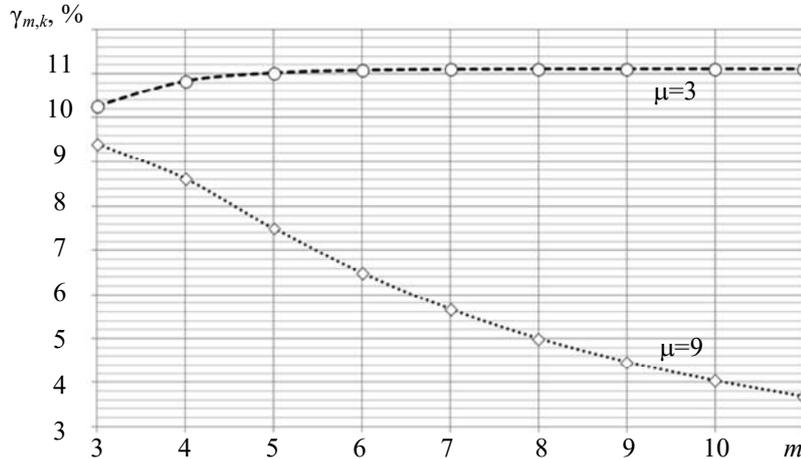


Рис. 2

Анализ величин $\xi_{m,k}$ показывает, что два контрольных разряда Σ_m^3 -кодами значительно эффективнее используются, чем другими кодами с суммированием. Для данных кодов значение $\xi_{m,k}$ уже при $m=6$ превышает 99% . Для Σ_m^9 -кодов показатель $\xi_{m,k}$ от 0 при $m=4$ постепенно увеличивается и достигает значения $\approx 33,6\%$ при $m=11$. С дальнейшим увеличением длины информационного вектора значение показателя $\xi_{m,k}$ возрастает и, так же как и для кода с модулем $\mu=3$, приближается к 100% . Наименее эффективно используются контрольные разряды у Σ_m -кодов: до значения $m=8$ показатель $\xi_{m,k}$ возрастает, однако не превышает и 25% , а после резко падает и далее до $m=11$ не превышает 4% . С увеличением m зависимости сохраняются при каждом новом увеличении числа контрольных разрядов. Самим кодом с суммированием, таким образом, крайне неэффективно используются свои контрольные разряды. Именно поэтому, а также по причине более простой процедуры обеспечения самопроверяемости кодера кода с суммированием (формируется полное множество контрольных векторов) представляется целесообразным использование именно модульных кодов с суммированием при синтезе контролепригодных цифровых устройств и технических средств их диагностирования.

Заключение. При синтезе контролепригодных цифровых схем и технических средств их диагностирования эффективным представляется использование троичных модульных кодов с суммированием, некоторые из которых рассмотрены в настоящей статье. Такие коды, несмотря на малую избыточность, не обнаруживают сравнительно небольшое количество ошибок в информационных векторах.

В ходе исследования получены следующие новые научные результаты:

- сформулированы правила построения троичных модульных кодов с суммированием в троичной несимметричной логике, являющихся аналогами двоичных модульных кодов;
- получена формула расчета общего количества необнаруживаемых ошибок троичными модульными кодами с суммированием;
- экспериментально установлено, что троичные модульные коды с суммированием сохраняют свойство классических двоичных и троичных кодов с суммированием, заключающееся в том, что доля необнаруживаемых ими ошибок кратностью d в информационных век-

торах от общего числа ошибок данной кратностью не зависит от длины информационного вектора и является постоянной величиной.

Это и другие свойства кодов с суммированием целесообразно учитывать при синтезе самопроверяемых и отказоустойчивых цифровых вычислительных устройств и систем.

Дальнейшие исследования особенностей троичных кодов с суммированием могут быть связаны с изучением методов их модификации, направленных на повышение числа обнаруживаемых ошибок как в целом, так и по их видам и кратностям при малой избыточности кода. Например, подобные модификации кодов могут быть получены путем установления неравноправия между разрядами в информационном векторе и использования также модулярной арифметики для получения суммарного значения веса [36].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гаврилов М. А., Остиану В. М., Потехин А. И. Надежность дискретных систем // Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1970. С. 7—104.
2. Согомонян Е. С., Слабаков Е. В. Самопроверяемые устройства и отказоустойчивые системы. М.: Радио и связь, 1989, 208 с.
3. Дрозд А. В., Харченко В. С., Антощук С. Г., Дрозд Ю. В., Дрозд М. А., Сулима Ю. Ю. Рабочее диагностирование безопасных информационно-управляющих систем / Под ред. А. В. Дрозда и В. С. Харченко. Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского „ХАИ“, 2012. 614 с.
4. Kharchenko V., Kondratenko Yu., Kasprzyk J. Green IT Engineering: Concepts, Models, Complex Systems Architectures // Springer Book Series „Studies in Systems, Decision and Control“. 2017. Vol. 74. 305 p. DOI: 10.1007/978-3-319-44162-7.
5. Fujiwara E. Code Design for Dependable Systems: Theory and Practical Applications. John Wiley & Sons, 2006. 720 p.
6. Göessel M., Ocheretny V., Sogomonyan E., Marienfeld D. New Methods of Concurrent Checking. Dordrecht: Springer Science+Business Media B.V., 2008. 184 p.
7. Сагалович Ю. Л. Введение в алгебраические коды. М.: Ин-т проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, 2010. 302 с.
8. Сапожников В. В., Сапожников Вл. В., Христов Х. А., Гавзов Д. В. Методы построения безопасных микроэлектронных систем железнодорожной автоматики / Под ред. Вл. В. Сапожникова. М.: Транспорт, 1995. 272 с.
9. Hahanov V. Cyber Physical Computing for IoT-driven Services. N. Y.: Springer International Publishing AG, 2018. 279 p.
10. Kosky P., Balmer R.T., Keat W.D., Wise G. Exploring Engineering: An Introduction to Engineering and Design. Academic Press, 2020. 656 p. DOI: 10.1016/C2017-0-01871-2.
11. Zhuo Y., Li X.-L., Sun Y.-B., Li X.-J., Shi Y.-L., Chen S.-M., Hu S.-J., Guo A. Statistical Variability Analysis in Vertically Stacked Gate All Around FETs at 7 nm Technology // 14th IEEE Intern. Conf. on Solid-State and Integrated Circuit Technology (ICSICT), Qingdao, China, 31 Oct. — 3 Nov. 2018. DOI: 10.1109/ICSICT.2018.8565797.
12. Yoon J.-S., Lee S., Lee J., Jeong J., Yun H., Baek R.-H. Reduction of Process Variations for Sub-5-nm Node Fin and Nanosheet FETs Using Novel Process Scheme // IEEE Trans. on Electron Devices. 2020. Vol. 67, iss. 7. P. 2732—2737. DOI: 10.1109/TED.2020.2995340.
13. Kumar O., Kaur M. Single Electron Transistor: Applications & Problems // Intern. Journal of VLSI Design & Communication Systems. 2010. Vol. 1, iss. 4. P. 240—29. DOI: 10.5121/vlsic.2010.1403.
14. Cambou B., Flikkema P.G., Palmer J., Telesca D., Philabaum C. Can Ternary Computing Improve Information Assurance? // Cryptography. 2018. Vol. 2, iss. 1 P. 1—16. DOI: 10.3390/cryptography2010006.
15. Wu J. Ternary Logic Circuit for Error Detection and Error Correction // Proc. of the 19th Intern. Symp. on Multiple-Valued Logic, Guangzhou, China, 29—31 May, 1989. P. 94—99. DOI: 10.1109/ISMVL.1989.37766.

16. Брусенцов Н. П., Маслов С. П., Рамиль Альварес Х. Микрокомпьютерная система обучения „Наставник“. М.: Наука, 1990. 223 с.
17. Connely J. Ternary Computing Testbed 3-Trit Computer Architecture / California Polytechnic State University of San Luis Obispo, Aug. 2008. 184 p.
18. Kim S., Lim T., Kang S. An Optimal Gate Design for the Synthesis of Ternary Logic Circuits // 23rd Asia and South Pacific Design Automation Conf. (ASP-DAC), Jeju, South Korea, 22—25 Jan. 2018. P. 476—481. DOI: 10.1109/ASPDAC.2018.8297369.
19. Gulliver T. A., Ostergard P. R. J. Improved Bounds for Ternary Linear Codes of Dimension 7 // IEEE Trans. on Information Theory. 1997. Vol. 43, iss. 4. P. 1377—1381. DOI: 10.1109/18.605613.
20. Bitouze N., Graell i Amat A., Rosnes E. Error Correcting Coding for a Nonsymmetric Ternary Channel // IEEE Trans. on Information Theory. 2010. Vol. 56, iss. 11. P. 5715—5729. DOI: 10.1109/TIT.2010.2069211.
21. Laaksonen A., Östergård P. R. J. New Lower Bounds on Error-Correcting Ternary, Quaternary and Quinary Codes // Lecture Notes in Computer Science 10495, Springer: Coding Theory and Applications; 5th Intern. Castle Meeting, ICMCTA 2017, Vihula, Estonia, Aug. 28—31, 2017. P. 228—237.
22. Кодирование информации (двоичные коды) / Н. Т. Березюк, А. Г. Андрущенко, С. С. Моцицкий, В. И. Глушков, М. М. Бенеша, В. А. Гаврилов; Под ред. Н. Т. Березюка. Харьков: Вища школа, 1978. 252 с.
23. Svanström M. A Lower Bound for Ternary Constant Weight Codes // IEEE Trans. on Information Theory. 1997. Vol. 43. P. 1630—1632.
24. Svanström M., Östergård P. R. J., Bogdanova G. T. Bounds and Constructions for Ternary Constant-Composition Codes // IEEE Trans. on Information Theory. 2002. Vol. 48. P. 101—111.
25. Ефанов Д. В. Троичные коды с суммированием и их модификации // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем (МЭС). 2020. № 1. С. 119—125. DOI: 10.31114/2078-7707-2020-1-119-125.
26. Ефанов Д. В. Троичные коды с суммированием для контроля цифровых схем // Проблемы управления. 2020. № 4. С. 63—71. DOI: 10.25728/ru.2020.4.6.
27. Efanov D. Ternary Sum Codes // Proc. of the 18th IEEE East-West Design & Test Symp. (EWDTS'2020), Varna, Bulgaria, Sept. 4—7, 2020. P. 92—99. DOI: 10.1109/EWDTS50664.2020.9225033.
28. Ефанов Д. В. Ошибки в троичных кодовых векторах, их классификация и обнаружение с помощью помехозащищенного кодирования // Изв. вузов. Приборостроение. 2020. Т. 63, № 5. С. 391—404. DOI: 10.17586/0021-3454-2020-63-5-391-404.
29. Efanov D. Classification of Errors in Ternary Code Vectors from the Standpoint of Their Use in the Synthesis of Self-Checking Digital Systems // Proc. of the 18th IEEE East-West Design & Test Symp. (EWDTS'2020), Varna, Bulgaria, Sept. 4-7, 2020. P. 40—46. DOI: 10.1109/EWDTS50664.2020.9224826.
30. Поспелов Д. А. Логические методы анализа и синтеза схем. М.: Энергия, 1974. 368 с.
31. Ефанов Д. В., Сапожников В. В., Сапожников Вл. В. О свойствах кода с суммированием в схемах функционального контроля // Автоматика и телемеханика. 2010. № 6. С. 155—162.
32. Ефанов Д. В., Сапожников В. В., Сапожников Вл. В. Применение модульных кодов с суммированием для построения систем функционального контроля комбинационных логических схем // Автоматика и телемеханика. 2015. № 10. С. 152—169.
33. Сапожников В. В., Сапожников Вл. В., Ефанов Д. В. Коды с суммированием для систем технического диагностирования. Т. 1. Классические коды Бергера и их модификации. М.: Наука, 2020. 383 с.
34. Ефанов Д. В. Троичный код паритета в системах рабочего диагностирования устройств автоматики и вычислительной техники // Информационные технологии. 2019. Т. 25, № 7. С. 426—434. DOI: 10.17587/it.25.426-434.
35. Efanov D. V. Ternary Parity Codes: Features // Proc. of the 17th IEEE East-West Design & Test Symp. (EWDTS'2019), Batumi, Georgia, Sept. 13—16, 2019. P. 315—319. DOI: 10.1109/EWDTS.2019.8884414.
36. Сапожников В. В., Сапожников Вл. В., Ефанов Д. В. Коды с суммированием для систем технического диагностирования. Т. 2. Взвешенные коды с суммированием. М.: Наука, 2021. 455 с.

- Дмитрий Викторович Ефанов** — *Сведения об авторе* д-р техн. наук, доцент; Российский университет транспорта, кафедра автоматизации, телемеханики и связи на железнодорожном транспорте; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого; Высшая школа транспорта Института машиностроения, материалов и транспорта; профессор; E-mail: TrES-4b@yandex.ru

Поступила в редакцию 04.11.21; одобрена после рецензирования 20.12.21; принята к публикации 29.03.22.

REFERENCES

- Gavrilov M.A., Ostianu V.M., Potekhin A.I. *Itogi nauki i tekhniki. Seriya „Teoriya veroyatnostey. Matematicheskaya statistika. Teoreticheskaya kibernetika“* (Results of Science and Technology. Series „Probability Theory. Math Statistics. Theoretical Cybernetics“), 1969, 1970, pp. 7–104. (in Russ.)
- Sogomonyan E.S., Slabakov E.V. *Samoproveryaemye ustroystva i otkazoustoychivye sistemy* (The Self-Checked Devices and Failure-Safe Systems), Moscow, 1989, 208 p. (in Russ.)
- Drozd A.V., Kharchenko V.S., Antoshchuk S.G., Drozd Yu.V., Drozd M.A., Sulima Yu.Yu. *Rabocheye diagnostirovaniye bezopasnykh informatsionno-upravlyayushchikh sistem* (Working Diagnostics of Safe Information and Control Systems), Khar'kov, 2012, 614 p. (in Russ.)
- Kharchenko V., Kondratenko Yu., Kacprzyk J. *Green IT Engineering: Concepts, Models, Complex Systems Architectures*, Springer Book series "Studies in Systems, Decision and Control", 2017, vol. 74, 305 p., DOI: 10.1007/978-3-319-44162-7.
- Fujiwara E. *Code Design for Dependable Systems: Theory and Practical Applications*, John Wiley & Sons, 2006, 720 p.
- Göessel M., Ocheretny V., Sogomonyan E., Marienfeld D. *New Methods of Concurrent Checking*, Dordrecht: Springer Science+Business Media B.V., 2008, 184 p.
- Sagalovich Yu.L. *Vvedeniye v algebraicheskiye kody* (Introduction to Algebraic Codes) Moscow, 2010, 302 p. (in Russ.)
- Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov VI.V., Khristov Kh.A., Gavzov D.V. *Metody postroyeniya bezopasnykh mikroelektronnykh sistem zheleznodorozhnoy avtomatiki* (Methods of Construction of Safe Microelectronic Systems of Railway Automation), Moscow, 1995, 272 p. (in Russ.)
- Hahanov V. *Cyber Physical Computing for IoT-driven Services*, NY, Springer International Publishing AG, 2018, 279 p.
- Kosky P., Balmer R.T., Keat W.D., Wise G. *Exploring Engineering: An Introduction to Engineering and Design*, Academic Press, 2020, 656 p., <https://doi.org/10.1016/C2017-0-01871-2>.
- Zhuo Y., Li X.-L., Sun Y.-B., Li X.-J., Shi Y.-L., Chen S.-M., Hu S.-J., Guo A. *2018 14th IEEE International Conference on Solid-State and Integrated Circuit Technology (ICSICT)*, 31 Oct.–3 Nov. 2018, Qingdao, China, DOI: 10.1109/ICSICT.2018.8565797.
- Yoon J.-S., Lee S., Lee J., Jeong J., Yun H., Baek R.-H. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 2020, no. 7(67), pp. 2732–2737, DOI: 10.1109/TED.2020.2995340.
- Kumar O., Kaur M. *International Journal of VLSI Design & Communication Systems*, 2010, no. 4(1), pp. 240–249, DOI: 10.5121/ijvlsic.2010.1403.
- Cambou B., Flikkema P.G., Palmer J., Telesca D., Philabaum C. *Cryptography*, 2018, no. 1(2), pp. 1–16, DOI: 10.3390/cryptography2010006.
- Wu J. *Proceedings of 19th International Symposium on Multiple-Valued Logic*, 29–31 May 1989, Guangzhou, China, pp. 94–99, DOI: 10.1109/ISMVL.1989.37766.
- Brusentsov N.P., Maslov S.P., Ramil' Al'vares Kh. *Mikrokompyuternaya sistema obucheniya „Nastavnik“* (Microcomputer Training System "Mentor"), Moscow, 1990, 223 p. (in Russ.)
- Connely J. *Ternary Computing Testbed 3-Trit Computer Architecture*, California Polytechnic State University of San Luis Obispo, August 29th, 2008, 184 p.
- Kim S., Lim T., Kang S. *23rd Asia and South Pacific Design Automation Conference (ASP-DAC)*, 22–25 January 2018, Jeju, South Korea, pp. 476–481, DOI: 10.1109/ASP-DAC.2018.8297369.
- Gulliver T.A., Ostergard P.R.J. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1997, no. 4(43), pp. 1377–1381, DOI: 10.1109/18.605613.
- Bitouze N., Graell i Amat A., Rosnes E. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, no. 11(56), pp. 5715–5729, DOI: 10.1109/TIT.2010.2069211.
- Laaksonen A., Östergård P.R.J. *Lecture Notes in Computer Science 10495*, Springer: Coding Theory and Applications, 5th International Castle Meeting, ICMCTA 2017, Vihula, Estonia, August 28–31, 2017, pp. 228–237.
- Berezyuk N.T., Andrushchenko A.G., Moshchitskiy S.S., Glushkov V.I., Benesha M.M., Gavrilov V.A. *Kodirovaniye informatsii (dvoichnyye kody)* (Information Coding (Binary Codes)), Khar'kov, 1978, 252 p. (in Russ.)
- Svanström M. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1997, vol. 43, pp. 1630–1632.
- Svanström M., Östergård P.R.J., Bogdanova G.T. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2002, vol. 48, pp. 101–111.
- Efanov D.V. *Problemy razrabotki perspektivnykh mikro- i nanoelektronnykh sistem (MES)*, 2020, no. 1, pp. 119–125, DOI: 10.31114/2078-7707-2020-1-119-125. (in Russ.)

26. Efanov D.V. *Control sciences*, 2020, no. 4, pp. 63–71, DOI: 10.25728/pu.2020.4.6. (in Russ.)
27. Efanov D. *Proceedings of 18th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2020)*, Varna, Bulgaria, September 4–7, 2020, pp. 92–99, DOI: 10.1109/EWDTS50664.2020.9225033.
28. Efanov D.V. *Journal of Instrument Engineering*, 2020, no. 5(63), pp. 391–404, DOI: 10.17586/0021-3454-2020-63-5-391-404.
29. Efanov D. *Proceedings of 18th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2020)*, Varna, Bulgaria, September 4–7, 2020, pp. 40–46, DOI: 10.1109/EWDTS50664.2020.9224826.
30. Pospelov D.A. *Logicheskiye metody analiza i sinteza skhem* (Logical Methods of Analysis and Synthesis of Circuits), Moscow, 1974, 368 p. (in Russ.)
31. Efanov D.V., Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.I. *Automation and Remote Control*, 2010, no. 6, pp. 1117–1123.
32. Efanov D.V., Sapozhnikov V.V. *Automation and Remote Control*, 2015, no. 10, pp. 1834–1848.
33. Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.I., Efanov D.V. *Kody s summirovaniyem dlya sistem tekhnicheskogo diagnostirovaniya. T. 1. Klassicheskiye kody Bergera i ikh modifikatsii* (Summed Codes for Technical Diagnostic Systems. Vol. 1. Classical Berger Codes and Their Modifications), Moscow, 2020, 383 p. (in Russ.)
34. Efanov D.V. *Information Technologies*, 2019, no. 7(25), pp. 426–434, DOI: 10.17587/it.25.426-434. (in Russ.)
35. Efanov D.V. *Proceedings of 17th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2019)*, Batumi, Georgia, September 13–16, 2019, pp. 315–319, DOI: 10.1109/EWDTS.2019.8884414.
36. Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.I., Efanov D.V. *Kody s summirovaniyem dlya sistem tekhnicheskogo diagnostirovaniya. T. 2. Vzveshennyye kody s summirovaniyem* (Summed Codes for Technical Diagnostic Systems. Vol. 2. Weighted Codes with Summation), Moscow, 2021, 455 p. (in Russ.)

Data on author

Dmitry V. Efanov

— Dr. Sci., Associate Professor; Russian University of Transport, Department of Automation, Remote Control, and Communications on Railway Transport; Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Higher School of Transport of the Institute of Machinery, Materials, and Transport; Professor;
E-mail: TrES-4b@yandex.ru

Received 04.11.21; approved after reviewing 20.12.21; accepted for publication 29.03.22.