

**СТРУКТУРИРОВАННЫЕ ПО УОЛШУ
ДВУХУРОВНЕВЫЕ И МОДУЛЬНО ДВУХУРОВНЕВЫЕ
КВАЗИОРТОГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ
ДЛЯ МАСКИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

А. М. СЕРГЕЕВ

*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
Санкт-Петербург, Россия
aleks.asklab@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается отдельный класс квазиортогональных матриц, а именно двухуровневые матрицы Мерсенна, структурированные по Уолшу. Показано отличие систем ортогональных функций Адамара — Уолша и Мерсенна — Уолша. Рассматриваются модульно двухуровневые матрицы Мерсенна — Уолша и их портреты. Система функций на основе модульно двухуровневой матрицы Мерсенна — Уолша имеет вдвое больше уровней, чем система функций, построенная на основе двухуровневой матрицы Мерсенна, структурированной по Уолшу. В качестве прикладной задачи с использованием структурированных квазиортогональных матриц рассматривается процедура маскирования двухуровневыми и модульно двухуровневыми матрицами Мерсенна — Уолша изображений с оценкой результатов маскирования — разрушения исходного изображения. На примере тестового изображения демонстрируется изменение гистограммы яркостей и влияние порядка маскирующей матрицы на результат маскирования.

Ключевые слова: квазиортогональные матрицы, матрицы Адамара — Уолша, матрицы Мерсенна — Уолша, модульно двухуровневые матрицы, маскирование изображений

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № FSRF-2023-0003.

Ссылка для цитирования: Сергеев А. М. Структурированные по Уолшу двухуровневые и модульно двухуровневые квазиортогональные матрицы для маскирования изображений // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 5. С. 399—408. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-399-408.

**TWO-LEVEL AND MODULARLY TWO-LEVEL QUASI-ORTHOGONAL
WALSH-STRUCTURED MATRICES FOR IMAGE MASKING**

A. M. Sergeev

*St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,
St. Petersburg, Russia
aleks.asklab@gmail.com*

Abstract. A separate class of quasi-orthogonal matrices, namely, two-level Mersenne matrices structured according to Walsh, are studied. The difference between the systems of orthogonal Hadamard–Walsh and Mersenne–Walsh functions is shown. Modular two-level Mersenne–Walsh matrices and their portraits are considered. A system of functions constructed using a modularly two-level Mersenne–Walsh matrix has twice as many levels as a system of functions constructed on the basis of a two-level Mersenne matrix structured according to Walsh. As an applied problem using structured quasi-orthogonal matrices, the procedure for masking images with two-level and modularly two-level Mersenne–Walsh matrices with an assessment of the results of masking - destruction of the original image is considered. The example of a test image demonstrates the change in the brightness histogram and the influence of the order of the masking matrix on the masking result.

Keywords: quasi-orthogonal matrices, Hadamard–Walsh matrices, Mersenne–Walsh matrices, modular two-level matrices, image masking

Acknowledgments: the work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement No. FSRF-2023-0003.

For citation: Sergeev A. M. Two-level and modularly two-level quasi-orthogonal Walsh-structured matrices for image masking. *Journal of Instrument Engineering*. 2023. Vol. 66, N 5. P. 399—408 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-399-408.

Введение. Матрицы являются основой ряда методов преобразования информации, таких как помехоустойчивое кодирование, сжатие и обработка изображений, криптография и др. [1—6]. Принципиально матрицы могут быть любые, но важно, чтобы для квадратной матрицы $\mathbf{A}_n$ порядка n , используемой для кодирования/сжатия/маскирования/шифрации, была вычислима точно обратная матрица $\mathbf{A}_n^{-1}$ для декодирования/декомпрессии/демаскирования/дешифрации. Однако проблема состоит в том, что абсолютно точно вычислить $\mathbf{A}_n^{-1}$ не представляется возможным, особенно для матриц высоких порядков.

Для перечисленных задач наиболее востребованы ортогональные и квазиортогональные матрицы.

Матрица $\mathbf{A}_n$ является ортогональной [2], если выполняется условие

$$\mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_n = \mathbf{I}_n, \quad (1)$$

где $\mathbf{A}_n^T$ — транспонированная матрица $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{I}_n$ — единичная матрица.

Особенность ортогональных матриц заключается в том, что для них вычислять обратную матрицу нет необходимости, поскольку $\mathbf{A}_n^{-1} = \mathbf{A}_n^T$, а транспонирование сводится к замене строк на столбцы исходной матрицы $\mathbf{A}_n$. Транспонированная матрица, в отличие от обратной, представляется точно, что позволяет исключить внесение погрешностей в вычисления.

Количество ортогональных матриц принципиально не ограничено ни по порядкам их существования, ни по количеству, но их вычисление с алгоритмической точки зрения затруднительно. Введение ограничений на параметры ортогональных матриц позволяет преодолеть трудности, но значительно сужает их класс и требует систематизации методов их вычислений.

Известно, что матрицы наследуют структурные характеристики методов их вычислений на порядках существования. Однако структурные инварианты не всегда являются полезными для конкретных задач их применения.

Цель настоящей статьи — показать преимущество модульно двухуровневых квазиортогональных матриц Мерсенна — Уолша для использования в широком круге технических применений на примере маскирования изображений.

Двухуровневые квазиортогональные матрицы. Наиболее известными ортогональными матрицами с ограничением на количество и возможные значения их элементов (уровни) являются матрицы Адамара $\mathbf{H}_n$ [2, 7], состоящие из элементов двух значений: 1 и -1 , для которых выполняется условие

$$\mathbf{H}_n^T \mathbf{H}_n = n \mathbf{I}_n. \quad (2)$$

Жесткое ограничение на элементы матрицы Адамара приводит к тому, что они существуют не на всех порядках n , а только на $n = 4t$, где t — натуральное число. И, строго говоря, матрица Адамара является квазиортогональной, так как условия (1) и (2) отличаются коэффициентом n перед $\mathbf{I}_n$, что эквивалентно коэффициенту $1/n$ для элементов в самой матрице Адамара.

Востребованность двухуровневых матриц Адамара в технических приложениях, связанных с обработкой и преобразованием цифровой информации, объясняется именно целочисленностью значений уровней, что позволяет эффективно выполнять операции умножения с ними [8] на любых процессорах.

Как обобщение ортогональных матриц в [9] используются квазиортогональные матрицы Мерсенна $\mathbf{M}_n$, имеющие также два значения элементов: 1 и $-b$. Эти матрицы существуют на нечетных соседних с матрицами Адамара порядках, принадлежащих последовательности $4t - 1$ [10], включающей последовательность чисел Мерсенна, и для них выполняется условие

$$\mathbf{M}_n^T \mathbf{M}_n = \omega(n) \mathbf{I}_n. \quad (3)$$

Коэффициент $\omega(n)$ в выражении (3) и значение элемента b матрицы $\mathbf{M}_n$ являются функциями от t и в общем случае они иррациональны и вариативны при изменении порядка n . Теория матриц Мерсенна тесно связана с доказательством гипотезы Адамара [11].

Для приведенных матриц Мерсенна уровень b , если второй элемент имеет уровень 1, вычисляется как $1/2$ при $n=3$, а в остальных случаях — как $b = (q - \sqrt{4q})/(q - 4)$, где $q=n+1$ (порядки матриц Адамара). Значению уровня b присваивается знак минус для удовлетворения требований по дизайну строк таких матриц и их структуры в целом [10].

Вычисления с двухуровневыми матрицами Мерсенна также эффективно выполняются в процессорах цифровой обработки сигналов и других процессорах с аппаратной реализацией операций умножения.

Для наглядного представления матриц и выявления особенностей их структур, как правило, используется аппарат портретов [12, 13], где элементы представлены полями разного цвета. Для двухуровневых матриц это поля черного цвета, соответствующие значению -1 или $-b$, и белого цвета, соответствующие значению 1.

На рис. 1, а, б для примера приведены портреты соответственно матрицы Мерсенна порядка 15, вычисленной модифицированным методом Пэли [14], и матрицы Адамара порядка 16, вычисленной методом Сильвестра.

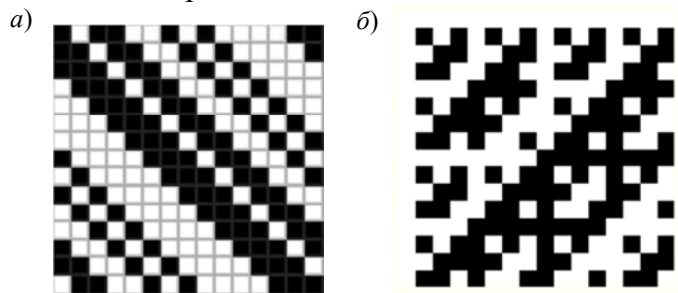


Рис. 1

Приведенные матрицы, как и матрицы других порядков, полученные указанными методами, имеют явно выраженные структуры, что успешно используется при выполнении преобразований с ними [6, 15]. Однако матрицы Адамара и Мерсенна могут быть без потери ортогональности структурно преобразованы перестановкой строк и столбцов к другим структурам.

Двухуровневые квазиортогональные матрицы, структурированные по Уолшу. В предположении, что значения элементов двухуровневых матриц Адамара по строкам или столбцам отражают переключение уровня сигналов, как в упрощенном аналоге тригонометрической системы Радемахера [16], путем перестановки строк и столбцов матрицы могут быть структурированы по Уолшу [17]. Тогда столбцы (строки) в них, начиная с первого (низкой частоты переключения), посредством перехода своих уровней отображают ортогональные функции Уолша [18]. На рис. 2 приведен портрет структурированной по Уолшу матрицы Адамара порядка 16, представленной на рис. 1, б.

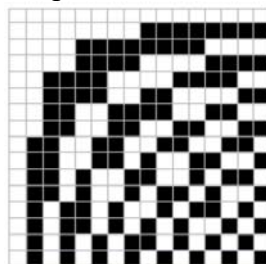


Рис. 2

Матрицы Мерсенна аналогично могут быть структурированы по Уолшу [19], однако ортогональные функции при этом принимают два несимметричных значения $\{1, -b\}$, где $b < 1$.

Определение 1. Матрицу Мерсенна с упорядоченными по частоте смены знака элементами в столбцах будем называть матрицей Мерсенна, упорядоченной по Уолшу, или матрицей Мерсенна — Уолша.

Определение 2. Систему генерируемых ортогональных функций на основе матрицы Мерсенна — Уолша будем называть системой функций Мерсенна — Уолша.

В качестве примера на рис. 3 приведены матрицы Мерсенна — Уолша начальных порядков 7, 15 и 31.

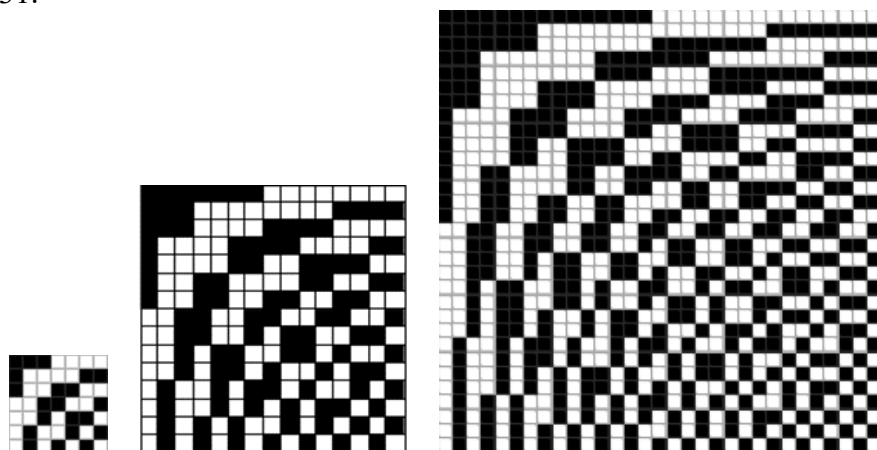


Рис. 3

Система ортогональных функций Мерсенна — Уолша отличается от системы классических функций Уолша. Особенности и причины, по которым этот базис может быть интересным [20], следующие.

Во-первых, система функций Мерсенна — Уолша, как и классическая система Уолша, является двухуровневой, но отличается от нее меньшим по модулю значением $-b$. При этом она является достаточно близкой аппроксимацией системы Уолша на нечетных порядках.

Во-вторых, система функций Мерсенна — Уолша отличается от классической меньшим на единицу числом порождающих ее элементов столбцов и, соответственно, для вычисления она проще классической.

В-третьих, любой базис отличает предпочтительная область его применения. В составе системы функций Мерсенна — Уолша нет константы — функции нулевой частоты. Следовательно, такая система предпочтительнее при построении полосовых фильтров при обработке сигналов и изображений [20]. Получить такую систему путем простого удаления каймы матрицы Адамара — Уолша не получится — будет нарушена ортогональность столбцов.

Модульно двухуровневые структурированные квазиортогональные матрицы. Двухуровневая реализация матриц Мерсенна была выбрана по образцу матриц Адамара из соображений эффективности выполнения преобразований с ними.

Квадратичное матричное уравнение (3) изначально предполагает наличие четырех значений $\{a, -a, b, -b\}$, однако их два по модулю. Следовательно, матрица Мерсенна может быть представлена как четырехуровневая, оставаясь, однако, модульно двухуровневой.

Определение 3. Портретом модульно двухуровневых матриц будем называть графическое изображение в виде совокупности полей двух оттенков: поля желтого оттенка соответствуют положительным значениям элементов a и b , а поля синего оттенка — их отрицательным значениям.

Требования по дизайну матриц Мерсенна, как и в [7], должны быть выполнены, и количество отрицательных элементов должно быть на один больше элементов положительных. Однако в отличие от двухуровневых матриц Мерсенна, структурированных по Уолшу, модульно двухуровневые матрицы строочно содержат элементы, соответствующие переключениям, начиная с высоких частот. Такие матрицы можно получить как результат умножения

двухуровневой матрицы Мерсенна — Уолша на матрицу порядка 31 с элементами 1 и -1, расположенными в шахматном порядке (рис. 4).

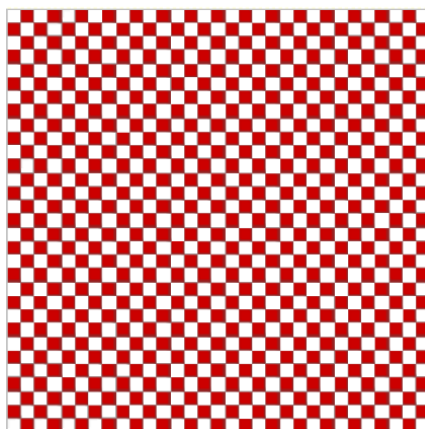


Рис. 4

На рис. 5 представлены модульно двухуровневые матрицы Мерсенна начальных порядков 7, 15 и 31, структурированные по Уолшу.

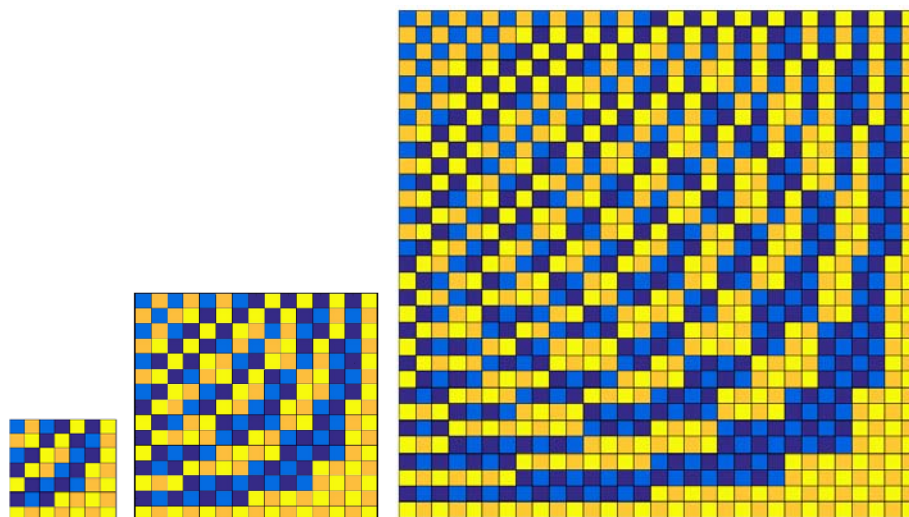


Рис. 5

Система функций, построенная с помощью модульно двухуровневой матрицы Мерсенна — Уолша, имеет вдвое больше уровней, чем система функций, построенная с помощью двухуровневой матрицы Мерсенна, структурированной по Уолшу.

Впервые модульно двухуровневая матрица Мерсенна — Уолша порядка 7 была представлена в [20]. В работе [21] впервые были показаны ее преимущества по сравнению с матрицей дискретного косинусного преобразования в алгоритме сжатия JPEG, а в работах [6, 22] — преимущества при обработке и маскировании изображений. Результатами дальнейших исследований в этой области являются вычисленные аналогичные матрицы порядков 63, 255 и выше и преобразования с ними.

Качество маскирования с использованием матриц, структурированных по Уолшу. В защитном маскировании, ориентированном на разрушение изображения на передающей стороне канала связи и восстановлении на приемной, используются структурированные квазиортогональные матрицы [6]. Само преобразование можно представить следующим образом [23]:

— на передающей стороне осуществляется последовательно преобразование $n \times n$ фрагментов изображения, равных маскирующей матрице, в виде

$$\mathbf{Y}_n^l = \mathbf{M}_n^T \mathbf{X}_n^l \mathbf{M}_n; \quad (4)$$

— на приемной стороне — обратное преобразование $n \times n$ фрагментов в виде

$$\mathbf{X}_n^l = (\mathbf{M}_n^T)^{-1} \mathbf{Y}_n^l \mathbf{M}_n^{-1}. \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{M}_n$ — маскирующая матрица, $\mathbf{Y}_n^l$ — передаваемый в канале маскированный по выражению (4) l -й фрагмент изображения. Таким образом, демаскированное изображение является итогом дефрагментации из всех l -х фрагментов принятого изображения вида $\mathbf{X}_n^l$.

Использование для маскирования ортогональных матриц $\mathbf{M}_n$, для которых $\mathbf{M}_n^{-1} = \mathbf{M}_n^T$, упрощает обратное преобразование по (5) до вида $\mathbf{X}_n^l = \mathbf{M}_n \mathbf{Y}_n^l \mathbf{M}_n^T$. Преобразования по (4) и (5) вносят только инструментальную погрешность умножения целочисленных значений на вещественные коэффициенты матриц $\mathbf{M}_n$ и $\mathbf{M}_n^T$, сводимую в современных вычислителях к нулю. Поэтому восстановленное на приемной стороне изображение соответствует исходному.

При умножении изображения в градациях серого на матрицу Адамара, являющуюся минимаксной, наблюдается „сглаживающий“ эффект в отношении яркостей пикселей. При двустороннем умножении эффект усиливается.

Пример. Для сравнения свойств двухуровневых и модульно двухуровневых матриц при маскировании изображений используем тестовый пример — изображение Lena.jpg [24], переведенное в 8-битный формат.

На рис. 6 представлены 8-битное изображение „Лена“ с разрешением 511×511 и гистограмма распределения яркостей его 261 121 пиксела.

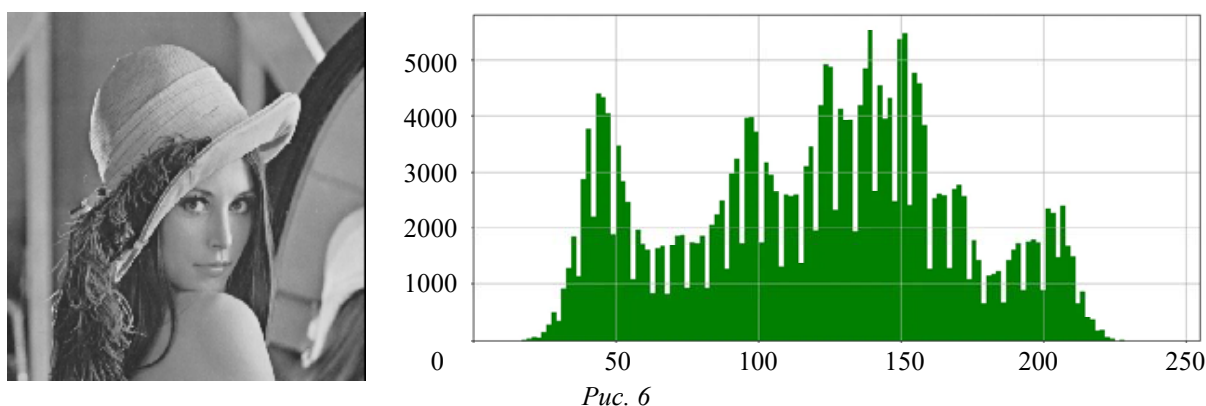


Рис. 6

На рис. 7 приведены изображения „Лена“, маскированные с использованием модульно двухуровневой (а) и двухуровневой (б) матриц Мерсенна — Уолша порядка 15 и матрицы Адамара — Уолша порядка 16 (в), а на рис. 8, а—в — соответствующие им гистограммы яркостей пикселей.

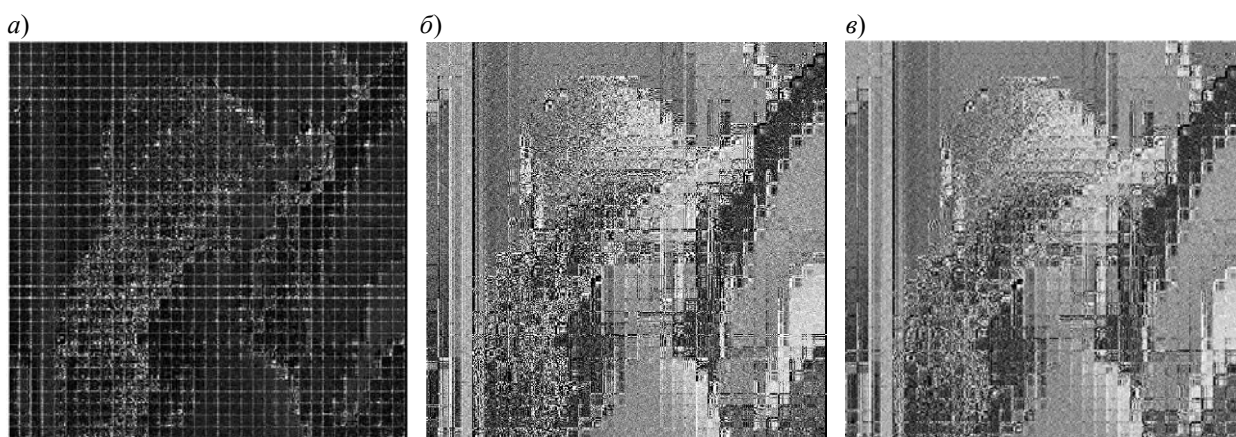


Рис. 7

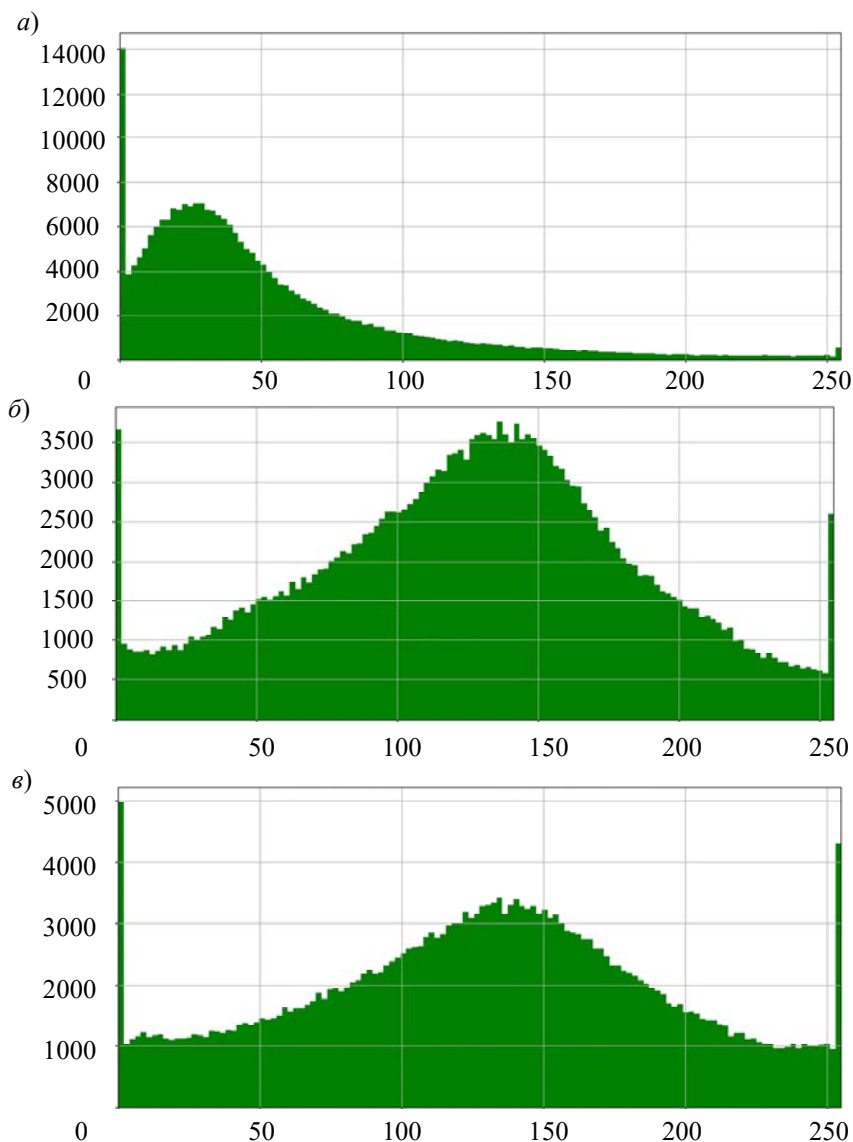


Рис. 8

Вычислительный эксперимент с использованием высокоуровневого языка программирования Python показал, что этот результат качественно воспроизводим при маскировании более 700 черно-белых изображений из библиотеки фотографий, собранных в сети Интернет и приведенных к 8-битному представлению. Как видно из рис. 8, гистограммы значений яркостей пикселей при маскировании упорядочиваются. Для модульно двухуровневой матрицы Мерсенна — Уолша (рис. 8, а) в гистограмме пик распределения смещен влево. Хотя изображение разрушено лучше, однако контуры объекта на нем („Лена“) просматриваются и, очевидно, для ряда применений такой результат не является удовлетворительным.

Эксперименты с маскирующими матрицами различных порядков показали, что качество разрушения изображения при их увеличении возрастает вне зависимости от количества уровней в матрице Мерсенна — Уолша. В большей степени на качество разрушения изображения влияет именно порядок используемой матрицы.

Так, на рис. 9 приведено изображение „Лена“, маскированное модульно двухуровневой матрицей Мерсенна — Уолша порядка 511, с еще более упорядочивающим гистограмму эффектом и качественным сокрытием исходного изображения.

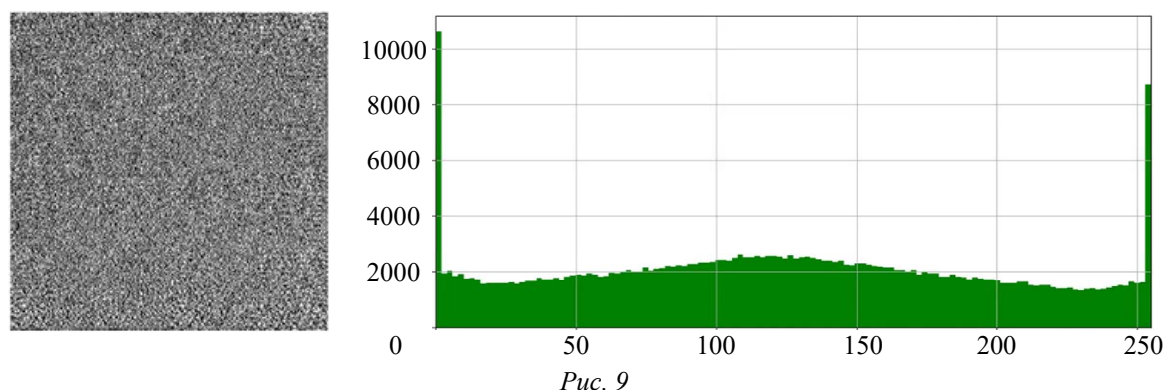


Рис. 9

Как показывает практика, сегодня не существует метрик, способных дать объективную характеристику качества разрушения изображения при маскировании. Даже при больших значениях среднеквадратической ошибки (СКО) между матрицей исходного и маскированного изображений не учитываются визуально различимые фрагменты, контуры объектов, изменения контраста и другие детали, остающиеся на изображении после маскирования. Примером могут служить изображения, приведенные на рис. 7. Однако хорошо маскированное изображение обязательно имеет большое значение СКО. Так, для исходного изображения „Лена“ и маскированного модульно двухуровневой матрицей Мерсенна — Уолша порядка 511, приведенного на рис. 9, значение СКО равно $2,4 \times 10^3$.

Заключение. Квазиортогональные матрицы Мерсенна, структурированные по Уолшу, имеют два вида: двухуровневые и модульно двухуровневые. Оба варианта матриц обладают важными для обработки и преобразования изображений свойствами упорядочения элементов в виде системы функций.

По сравнению с двухуровневыми матрицами Мерсенна — Уолша модульно двухуровневые имеют для маскирования лучшие перспективы по качеству разрушения изображения при равных порядках.

Наибольшее влияние на качество разрушения изображения при маскировании имеет порядок маскирующей матрицы Мерсенна — Уолша.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Horadam K. J. Hadamard matrices and their applications. Princeton Univ. Press, 2007. 263 p.
2. Seberry J., Yamada M. Hadamard Matrices: Constructions using number theory and linear algebra. Wiley, 2020. 384 p.
3. Mironovsky L. A., Slaev V. A. Strip-Method for Image and Signal Transformation. Berlin, Boston: De Gruyter, 2011. DOI: 10.1515/9783110252569.
4. Wang R. Introduction to Orthogonal Transforms with Applications in Data Processing and Analysis. Cambridge Univ. Press, 2010. 504 p.
5. Turyn R. J. Hadamard matrices, Baumert-Hall units, four symbol sequences, pulse compression, and surface wave encodings // Journal of Combinatorial Theory. Ser. A. 1974. Vol. 16. P. 313—333.
6. Vostrikov A., Sergeev M. Expansion of the Quasi-Orthogonal Basis to Mask Images // Smart Innovation, Systems and Technologies – 2015. Vol. 40. P. 161—168. DOI: 10.1007/978-3-319-19830-9_15.
7. Seberry J. Hadamard designs // Bulletin of the Australian Mathematical Society. 1970. N 2. P. 45—54.
8. Evangelaras H., Koukouvinos C., Seberry J. Applications of Hadamard matrices // Journal of Telecommunications and Information Technology. 2003. Vol. 2. P. 3—10.
9. Сергеев А. М., Востриков А. А. Специальные матрицы: вычисление и применение. СПб: Политехника, 2018. 112 с.
10. Балонин Н. А., Сергеев М. Б. Специальные матрицы: псевдообратные, ортогональные, адамаровы и критские. СПб: Политехника, 2019. 196 с. DOI: 10.25960/7325-1155-0.

11. Сергеев А. М. Обоснование перехода гипотезы Адамара в теорему // Изв. вузов. Приборостроение. 2021. Т. 64, № 2. С. 90—96.
12. Jenny suggested this idea a year ago at an International Meeting on Hadamard Matrices [Электронный ресурс]: <http://mathscinet.ru/catalogue/files/Judy-AnneOsborne_JennysIdea_VisHadamard.pdf>, 28.07.2022.
13. Portraits of Orthogonal Matrices as a Base for Discrete Textile Ornament Patterns / A. Sergeev, M. Sergeev, A. Vostrikov, D. Kurtyanik // Smart Innovation, Systems and Technologies. 2019. Vol. 143. P. 135—143. DOI: 10.1007/978-981-13-8303-8_12.
14. Балонин Н. А., Сергеев М. Б. Вычисление матриц Мерсенна методом Пэли. // Изв. вузов. Приборостроение. 2014. Т. 57, № 10. С. 38—41.
15. Use of symmetric Hadamard and Mersenne matrices in digital image processing / A. Vostrikov, M. Sergeev, N. Balonin, A. Sergeev // Proc. Computer Science. 2018. Vol. 126. P. 1054—1061. DOI: 10.1016/j.procs.2018.08.042.
16. Rademacher H. Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen // Mathematische Annalen. 1922. Vol. 87, N 1—2. P. 112—138.
17. Harmuth H. F. Applications of Walsh Functions in Communications // IEEE Spectrum. 1969. Vol. 6. P. 82—91.
18. Walsh J. L. A closed set of normal orthogonal functions // American Journal of Mathematics. 1923. Vol. 45. P. 5—24.
19. Вычисление матриц Мерсенна — Уолша / Н. А. Балонин, Ю. Н. Балонин, А. А. Востриков, М. Б. Сергеев // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2014. № 11 (125). С. 51—56. DOI: 10.14489/vkit.2014.011.pp.051—056.
20. Mersenne—Walsh Matrices [Электронный ресурс]: <<http://mathscinet.ru/catalogue/walsh/>>, 04.08.2022.
21. Kapranova E. A., Nenashev V. A., Sergeev M. B. Compression and Coding of Images for Satellite Systems of Earth Remote Sensing Based on Quasi-Orthogonal Matrices // Proc. of SPIE. Image and Signal Processing for Remote Sensing XXIV. 2018. P. 1078923. DOI:10.1117/12.2324249.
22. Balonin N., Vostrikov A., Sergeev M. Mersenne-Walsh Matrices for Image Processing // Smart Innovation, Systems and Technologies. 2015. Vol. 40. P. 141—147. DOI: 10.1007/978-3-319-19830-9_13.
23. Сергеев А. М. Методы преобразования изображений и кодирования сигналов в каналах распределенных систем на основе использования специальных квазиортогональных матриц: автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб, 2019. 153 с.
24. The Lenna Story [Электронный ресурс]: <<http://lenna.org/>>, 04.08.2022.

Сведения об авторе

Александр Михайлович Сергеев

— канд. техн. наук; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра вычислительных систем и сетей; доцент; E-mail: aleks.asklab@gmail.com

Поступила в редакцию 28.11.2022; одобрена после рецензирования 22.12.2022; принята к публикации 20.03.2023.

REFERENCES

1. Horadam K.J. *Hadamard matrices and their applications*, Princeton University Press, 2007, 263 p.
2. Seberry J., Yamada M. *Hadamard Matrices: Constructions using number theory and linear algebra*, Wiley, 2020, 384 p.
3. Mironovsky L.A., Slaev V.A. *Strip-Method for Image and Signal Transformation*, Berlin, Boston, De Gruyter, 2011, <https://doi.org/10.1515/9783110252569>.
4. Wang R. *Introduction to Orthogonal Transforms with Applications in Data Processing and Analysis*, Cambridge University Press, 2010, 504 p.
5. Turyn R.J. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 1974, vol. 16, pp. 313—333.
6. Vostrikov A., Sergeev M. *Smart Innovation, Systems and Technologies*, 2015, vol. 40, pp. 161—168, DOI: 10.1007/978-3-319-19830-9_15.
7. Seberry J. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 1970, no. 2, pp. 45—54.
8. Evangelaras H., Koukouvinos C., Seberry J. *Journal of Telecommunications and Information Technology*, 2003, vol. 2, pp. 3—10.
9. Sergeev A.M., Vostrikov A.A. *Spetsial'nyye matritsy: vychisleniye i primeneniye* (Special Matrices: Calculation and Application), St. Petersburg, 2018, 112 p. (in Russ.)
10. Balonin N.A., Sergeev M.B. *Spetsial'nyye matritsy: psevdootrazhatnyye, ortogonal'nyye, adamarovy i kritskiye* (Special Matrices: Pseudoinverse, Orthogonal, Hadamard and Cretan), St. Petersburg, 2019, 196 p., DOI: 10.25960/7325-1155-0.

11. Sergeev A.M. *Journal of Instrument Engineering*, 2021, no. 2(64), pp. 90–96. (in Russ.)
12. *Jenny suggested this idea a year ago at an International meeting on Hadamard Matrices*, http://mathscinet.ru/catalogue/files/Judy-AnneOsborne_JennysIdea_VisHadamard.pdf.
13. Sergeev A., Sergeev M., Vostrikov A., Kurtyanik D. *Smart Innovation, Systems and Technologies*, 2019, vol. 143, pp. 135–143, DOI: 10.1007/978-981-13-8303-8_12.
14. Balonin N.A., Sergeev M.B. *Journal of Instrument Engineering*, 2014, no. 10(57), pp. 38–41. (in Russ.)
15. Vostrikov A., Sergeev M., Balonin N., Sergeev A. *Procedia Computer Science*, 2018, vol. 126, pp. 1054–1061, DOI: 10.1016/j.procs.2018.08.042.
16. Rademacher H. *Mathematische Annalen*, 1922, no. 1–2(87), pp. 112–138.
17. Harmuth H.F. *IEEE Spectrum*, 1969, vol. 6, pp. 82–91.
18. Walsh J.L. *American Journal of Mathematics*, 1923, vol. 45, pp. 5–24.
19. Balonin N.A., Vostrikov A.A., Sergeev M.B. *Vestnik komp'yuternykh i informatsionnykh tekhnologii* (Herald of Computer and Information Technologies), 2014, no. 11(125), pp. 51–56, DOI: 10.14489/vkit.2014.011.pp.051-056. (in Russ.)
20. *Mersenne-Walsh Matrices*, <http://mathscinet.ru/catalogue/walsh/>.
21. Kapranova E.A., Nenashev V.A., Sergeev M.B. *Proceedings of SPIE – The International Society for Optical Engineering, "Image and Signal Processing for Remote Sensing XXIV"*, 2018, pp. 1078923, DOI:10.1117/12.2324249.
22. Balonin N., Vostrikov A., Sergeev M. *Smart Innovation, Systems and Technologies*, 2015, vol. 40, pp. 141–147, DOI: 10.1007/978-3-319-19830-9_13.
23. Sergeev A.M. *Metody preobrazovaniya izobrazheniy i kodirovaniya signalov v kanalakh raspredelennykh sistem na osnove ispol'zovaniya spetsial'nykh kvaziortogonal'nykh matrits* (Methods for Image Transformation and Signal Coding in Channels of Distributed Systems Based on the Use of Special Quasi-Orthogonal Matrices), Candidate's Thesis, St. Petersburg, 2019, 153 p. (in Russ.)
24. *The Lenna Story*, <http://lenna.org/>.

Data on author

Aleksander M. Sergeev — PhD; St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Department of Computer Systems and Network; Associate Professor;
E-mail: aleks.asklab@gmail.com

Received 28.11.2022; approved after reviewing 22.12.2022; accepted for publication 20.03.2023.