УДК 519.21
DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-373-388

СТАЦИОНАРНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ *GI*/*G*/1/1 В ТЕРМИНАХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕГЕНЕРИРУЮЩЕГО ПРОЦЕССА

А. И. Песчанский

Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия
peschansky_sntu@mail.ru

Аннотация. Полумарковский процесс, описывающий функционирование системы обслуживания *GI*/*G*/1/1, рассмотрен как регенерирующий. Точками регенерации являются моменты попадания заявок в свободную систему. Установлены формулы для вычисления следующих характеристик системы за цикл регенерации: средних чисел поступающих, обслуженных и потерянных заявок; среднего времени пребывания системы в свободном состоянии; средних суммарных времен пребывания в системе одной и двух заявок. Финальные вероятности физических состояний системы, средние стационарные времена пребывания в состояниях, в очереди и в системе выражены в терминах характеристик регенерирующего процесса.

Ключевые слова: *однолинейная система обслуживания с одним местом для ожидания, регенерирующий процесс, число поступающих, обслуженных и потерянных заявок за цикл регенерации, суммарные времена пребывания в состояниях, стационарные характеристики системы*

Ссылка для цитирования: *Песчанский А. И.* Стационарные показатели системы обслуживания *GI*/*G*/1/1 в терминах характеристик регенерирующего процесса // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 5. С. 373—388. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-373-388.

STATIONARY CHARACTERISTICS OF *GI*/*G*/1/1 QUEUING SYSTEM IN TERMS OF THE RENEWAL PROCESS

A. I. Peschansky

Sevastopol State University, Sevastopol, Russia
peschansky_sntu@mail.ru

Abstract. The semi-Markov process describing queuing system operation is analyzed as a renewal. Its regeneration points are the moments of requests arrivals to the free system. Formulas are established for calculating the following characteristics of the system for a regeneration cycle: average numbers of incoming, serviced and lost requests; average residence time of the system in the free state; average total sojourn times in the system for one and two claims. The final probabilities of the system physical states, average stationary sojourn times in the states, in the queue and in the system are expressed in terms of the renewal process characteristics.

Keywords: single-server queuing system with one queue place, renewal process, the number of arrivals, of complete and lost requests per renewal cycle, total sojourn times in states, stationary characteristics of the system

For citation: Peschansky A. I. Stationary characteristics of *GI*/*G*/1/1 queuing system in terms of the renewal process. *Journal of Instrument Engineering.* 2023. Vol. 66, N 5. P. 373—388 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-5-373-388.

Введение. Исследованиям систем массового обслуживания (СМО) посвящена обширная библиография. Обзор результатов, полученных в этой области, содержится, например, в [1—6]. Характеристики систем обслуживания, исходные параметры которых имеют экспоненциальные распределения, определяются в явном виде, как правило, с помощью аппарата марковских процессов. Завершенные результаты получены и для ряда систем, распределения параметров которых имеют конкретный вид (отличный от экспоненциального) либо только некоторые из параметров имеют распределения общего вида (например, [1—3, 7—11]). Для систем с общими входными потоками и произвольным распределением времени обслуживания

© *Песчанский А. И., 2023*

поиск явного выражения для основных характеристик вызывает определенные сложности. В этом случае стационарные характеристики систем находятся приближенно либо устанавливаются их асимптотические оценки [12—15]. Еще один подход — использование аппарата полумарковских процессов с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний [16—20]. Так, в [20] стационарные характеристики системы $GI/G/1/1$ выражаются в терминах функции распределения времени обслуживания, функции восстановления и прямого остаточного времени процесса восстановления, который порождается входящим потоком заявок. Описание систем обслуживания в терминах регенерирующих процессов встречается в научной литературе значительно реже. Поскольку полумарковский процесс, протекающий в системе $GI/G/1/1$, является также и регенерирующим, то представляется интересным стационарные показатели этой системы выразить через характеристики регенерирующего процесса. Это позволит углубиться в понимание динамики систем обслуживания при различных предположениях о входном потоке и процессе обслуживания.

Постановка задачи. Рассмотрим однолинейную систему обслуживания с одним местом для ожидания $GI/G/1/1$ в классификации Кендалла [21]. Время между моментами поступлений заявок во входящем в систему рекуррентном потоке — случайная величина (СВ) β с функцией распределения (ФР) $G(x) = P\{\beta \le x\}$. Время обслуживания заявки — СВ α с ФР $F(x) = P\{\alpha \le x\}$. Предполагается, что СВ α и β независимы, удовлетворяют условию $0 < P\{\beta < \alpha\} < 1$, имеют соответственно плотности распределения $f(x), g(x)$, конечные математические ожидания $M\alpha$, $M\beta$ и дисперсии. Поступающая в свободную систему заявка начинает немедленно обслуживаться. Если прибор занят обслуживанием, а место в очереди свободно, то заявка становится в очередь. В случае занятого прибора и отсутствия места в очереди заявка теряется.

Представленная система может находиться в следующих физических состояниях: 0 — прибор свободен, в очереди заявки нет, 1 — прибор занят обслуживанием, в очереди заявки нет; 2 — прибор обслуживает заявку, место в очереди занято. В [19, 20] функционирование системы описано с помощью полумарковского процесса $\xi(t)$ с дискретно-непрерывным множеством состояний. Расширенное фазовое пространство состояний системы сформировано в результате добавления к физическим состояниям непрерывных компонентов, которыми служат остаточные времена действия случайных факторов, изменяющих физические состояния [16—19]. С помощью предельных теорем теории полумарковских процессов с измеримым фазовым пространством состояний найдены финальные вероятности и средние стационарные времена пребывания системы в физических состояниях [20]. Полумарковский процесс $\xi(t)$ является также и регенерирующим. Циклами (периодами) регенерации являются промежутки времени между моментами поступлениями заявок в свободную систему.

В настоящей статье рассматривается полумарковский процесс $\xi(t)$ как регенерирующий и определяются его характеристики: средняя длительность цикла регенерации, средние суммарные времена пребывания системы в физических состояниях, средние числа поступающих и обслуженных заявок за цикл регенерации; известные стационарные показатели системы предлагается [20] выразить в терминах указанных характеристик.

Среднее число обслуженных заявок за цикл регенерации. Пусть $N_{\text{обс}}$ — число обслуженных заявок за цикл регенерации, т.е. за время между соседними моментами поступления заявок в свободную систему. Установим закон распределения этой случайной величины. Начнем с вероятности обслуживания только одной заявкиза цикл:

$$P(N_{\text{обс}} = 1) = P\{\beta > \alpha\} = \int_0^\infty g(y)F(y)dy\,.$$

Графическая иллюстрация этого события представлена на рис. 1, где *1* — обслуживающий прибор, *2* — поток заявок.

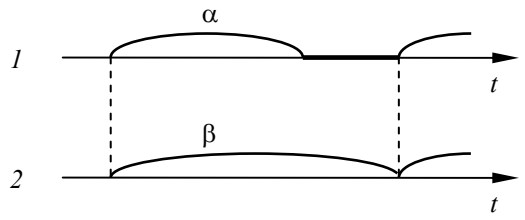

Рис. 1

При определении вероятностей остальных событий понадобится вычислить плотность распределения $v_g(t,x)$ прямого остаточного времени β_t для процесса восстановления, порожденного СВ β: $\beta_t = \tau_{\nu(t)+1} - t$ (фиксирует время после момента t до момента поступления следующей заявки в систему) [17, 22]:

$$v_g(t,x) = g(t+x) + \int_0^t g(t+x-s)h_g(s)ds,$$

где $h_g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g^{*(n)}(x)$ — плотность функции восстановления $H_g(x)$ входящего потока заявок.

Определим вероятность обслуживания двух заявок за цикл:

$$P(N_{\text{обс}} = 2) = P\{\alpha_1 - \beta \in dt,\ \beta_t > \alpha_2\} = \int_0^{\infty} F(x)dx \int_0^{\infty} v_g(t,x)dt \int_0^{\infty} f(t+y)g(y)dy.$$

Графическая иллюстрация этого события представлена на рис. 2.

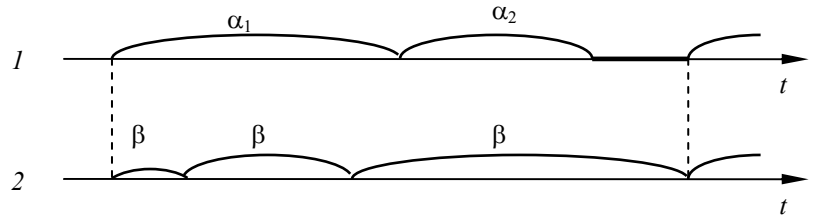

Рис. 2

Обозначим $\gamma(x,y) = \int_0^{\infty} f(t+y)v_g(t,x)dt$. Используя понятие табу-вероятности [23], отметим вероятностный смысл функции $\gamma(x,y)$: это плотность перехода системы из состояния „начинает обслуживаться заявка (до поступления следующей заявки в систему остается время y)“ в ближайшее аналогичное состояние (x — оставшееся время до поступления следующей заявки) при условии, что между этими событиями система не попадает в свободное состояние.

Учитывая, что

$$\int_0^{\infty} \gamma(x,y)\,d\,x = \overline{F}(y), \tag{1}$$

с помощью функции $\gamma(x,y)$ и ее итераций запишем закон распределения СВ $N_{\text{обс}}$:

$$P(N_{\text{обс}} = 1) = 1 - \int_0^{\infty} g(y)\overline{F}(y)dy = 1 - \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma(x,y)g(y)dy;$$

$$P(N_{\text{обс}}=2)=\int_0^\infty F(x)dx\int_0^\infty \gamma(x,y)g(y)dy=\int_0^\infty g(y)\overline{F}(y)dy-\int_0^\infty \overline{F}(x)dx\int_0^\infty \gamma(x,y)g(y)dy=$$

$$=\int_0^\infty dx\int_0^\infty \gamma^{(1)}(x,y)g(y)dy-\int_0^\infty dx\int_0^\infty \gamma^{(2)}(x,y)g(y)dy;$$

$$P(N_{\text{обс}}=n)=\int_0^\infty F(x)dx\int_0^\infty \gamma^{(n-1)}(x,y)g(y)dy=$$

$$=\int_0^\infty dx\int_0^\infty \gamma^{(n-1)}(x,y)g(y)dy-\int_0^\infty dx\int_0^\infty \gamma^{(n)}(x,y)g(y)dy,\ n\ge 3,$$

где

$$\gamma^{(1)}(x,y)=\gamma(x,y),\ \gamma^{(2)}(x,y)=\int_0^\infty \gamma(x,s)\gamma^{(1)}(s,y)ds,\ \gamma^{(n)}(x,y)=\int_0^\infty \gamma(x,s)\gamma^{(n-1)}(s,y)ds\ .$$

Найдем математическое ожидание СВ $N_{\text{обс}}$:

$$M(N_{\text{обс}})\equiv\overline{N}_{\text{обс}}=\sum_{n=1}^\infty nP(N_{\text{обс}}=n)=1-\int_0^\infty dx\int_0^\infty \gamma(x,y)g(y)dy+$$

$$+\sum_{n=2}^\infty n\left[\int_0^\infty dx\int_0^\infty \gamma^{(n-1)}(x,y)g(y)dy-\int_0^\infty dx\int_0^\infty \gamma^{(n)}(x,y)g(y)dy\right]=$$

$$=1-\int_0^\infty dx\int_0^\infty \gamma(x,y)g(y)dy+\sum_{m=1}^\infty (m+1)\int_0^\infty dx\int_0^\infty \gamma^{(m)}(x,y)g(y)dy-\sum_{n=2}^\infty n\int_0^\infty dx\int_0^\infty \gamma^{(n)}(x,y)g(y)dy=$$

$$=1+\sum_{m=1}^\infty \int_0^\infty dx\int_0^\infty \gamma^{(m)}(x,y)g(y)dy=1+\int_0^\infty dx\int_0^\infty h_\gamma(x,y)g(y)dy,\ h_\gamma(x,y)=\sum_{n=1}^\infty \gamma^{(n)}(x,y).$$

Таким образом, среднее число обслуженных заявок за цикл регенерации

$$\overline{N}_{\text{обс}}=\int_0^\infty (I+H_\gamma)g(x)dx, \tag{2}$$

где $H_\gamma\varphi(x)=\int_0^\infty h_\gamma(x,y)\varphi(y)dy$, I — единичный оператор.

В [20] доказано, что при условии $P\{\beta<\alpha_1+\alpha_2\}=\delta<1$ действие интегрального оператора H_γ ограничено в пространстве $L^{1,1}(R_+)$ функций, суммируемых с весом на правой полуоси.

Представим выражение (2) в ином виде. Для этого проинтегрируем по переменной x в пределах от 0 до ∞ тождество

$$\gamma(x,y)+\int_0^\infty \gamma(x,s)\,h_\gamma(s,y)\,d\,s=h_\gamma(x,y) \tag{3}$$

и учтем выражение (1), тогда

$$\int_0^\infty h_\gamma(x,y)F(x)dx=\overline{F}(y). \tag{4}$$

С помощью тождества (4) формула (2) для вычисления среднего числа обслуженных заявок преобразуется к виду

$$\overline{N}_{\text{обс}} = \int_0^\infty \overline{F}(x)(I + H_\gamma)g(x)dx + \int_0^\infty F(x)(I + H_\gamma)g(x)dx = 1 + \int_0^\infty \overline{A}_f(I + H_\gamma)g(x)dx, \qquad (5)$$

где

$$\overline{A}_f\varphi(x) = \int_0^\infty f(x+y)\varphi(y)dy.$$

Среднее число заявок, поступающих в систему за цикл регенерации. Обозначим через N число заявок, поступающих в систему за цикл регенерации. Введем в рассмотрение последовательность СВ $\{\zeta_n,\ n \ge 1\}$, которые определяются следующим образом: ζ_1 — оставшееся время обслуживания первой заявки в цикле регенерации в момент размещения в очереди следующей заявки (при условии, что она поступила во время обслуживания). Плотность распределения вероятностей СВ ζ_1:

$$\psi_1(x) = \left[\int_0^\infty g(y)f(x+y)dy\right]\left[\int_0^\infty g(y)\overline{F}(y)dy\right]^{-1} \equiv$$

$$\equiv \left[\int_0^\infty g(y)f(x+y)dy\right]\left[\int_0^\infty dx\int_0^\infty \gamma(x,y)g(y)dy\right]^{-1}.$$

Заметим, что ζ_1 в [18] обозначается как $[\alpha - \beta]^+$.Графические иллюстрации реализации СВ ζ_1 и ζ_2 представлены на рис. 3.

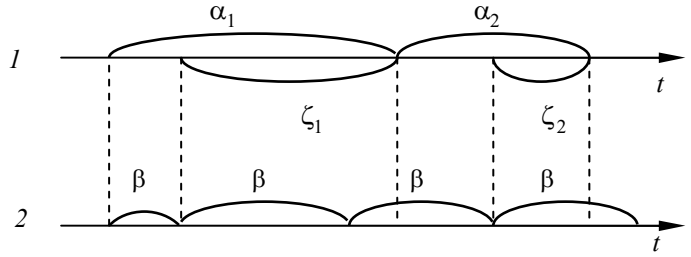

Рис. 3

Аналогично, ζ_n — время, оставшееся до окончания обслуживания n-й заявки в цикле регенерации, в момент постановки в очередь заявки, которая поступила во время обслуживания n-й заявки. Плотность распределения вероятностей ζ_n:

$$\psi_n(x) = \left[\int_0^\infty f(x+t)dt\int_0^\infty \gamma^{(n-1)}(t,y)g(y)dy\right]\left[\int_0^\infty dx\int_0^\infty \gamma^{(n)}(x,y)g(y)dy\right]^{-1},\ n \ge 2. \qquad (6)$$

Математическое ожидание числа N заявок, поступающих в систему за период регенерации, найдем по формуле полного математического ожидания. Учтем, что численное значение интеграла $\int_0^\infty H_g(x)\psi(x)dx$ равно среднему числу событий (первое событие не учитывается) в рекуррентном потоке, порожденном СВ β, за случайное время, которое является реализацией случайной величины с плотностью $\psi(x)$.

Имеем

$$M(N) \equiv \overline{N} = \sum_{n=1}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) M(N / N_{\text{обс}} = n) = P(N_{\text{обс}} = 1) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) \left[n + \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^{\infty} H_g(x) \psi_m(x) dx \right] = \sum_{n=1}^{\infty} n P(N_{\text{обс}} = n) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) \sum_{m=1}^{n-1} \int_0^{\infty} H_g(x) \psi_m(x) dx = \overline{N}_{\text{обс}} + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} H_g(x) \psi_m(x) dx \sum_{n=m+1}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) =$$

$$= \overline{N}_{\text{обс}} + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} H_g(x) \psi_m(x) dx \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma^{(m)}(x, y) g(y) dy .$$

В последнем преобразовании использовано

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) = \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma^{(m)}(x, y) g(y) dy .$$

Выражение (6) для плотности распределения $\psi_m(x)$ приводит к равенству

$$\overline{N} = \overline{N}_{\text{обс}} + \int_0^{\infty} H_g(x) dx \int_0^{\infty} f(x+t) g(t) dt + \int_0^{\infty} H_g(x) dx \int_0^{\infty} f(x+t) dt \int_0^{\infty} h_{\gamma}(t, y) g(y) dy$$

или

$$\overline{N} = \overline{N}_{\text{обс}} + \int_0^{\infty} H_g \overline{A}_f (I + H_{\gamma}) g(x) dx , \tag{7}$$

где

$$H_g \varphi(x) = \int_x^{\infty} h_g(y - x) \varphi(y) dy .$$

Учитывая формулу (5) для среднего числа обслуженных заявок, окончательно получаем

$$\overline{N} = 1 + \int_0^{\infty} (I + H_g) \overline{A}_f (I + H_{\gamma}) g(x) dx . \tag{8}$$

Заметим, что из (7) вытекает формула для нахождения среднего числа $\overline{N}_{\text{п}}$ потерянных заявок за цикл регенерации по причине отсутствия места в очереди:

$$\overline{N}_{\text{п}} = \overline{N} - \overline{N}_{\text{обс}} = \int_0^{\infty} H_g \overline{A}_f (I + H_{\gamma}) g(x) dx . \tag{9}$$

Среднее суммарное время пребывания в системе двух заявок за цикл регенерации. Обозначим через T_2 суммарное время пребывания в системе двух заявок (одна обслуживается, вторая — в очереди) за цикл регенерации. Очевидно, что T_2 является смесью сумм случайных величин ζ_m, плотности распределения которых определяются формулой (6), т.е.

$$T_2 = \sum_{n=2}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) \sum_{m=1}^{n-1} \zeta_m .$$

На рис. 4 схематически проиллюстрировано суммарное время пребывания в системе двух заявок за цикл регенерации для случая $N_{\text{обс}} = 3$.

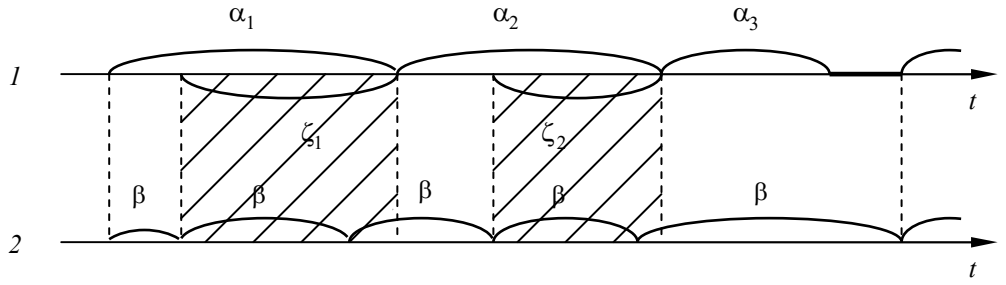

Рис. 4

По формуле полного математического ожидания имеем

$$M(T_2) \equiv \overline{T}_2 = \sum_{n=2}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) \sum_{m=1}^{n-1} M\zeta_m = \sum_{m=1}^{\infty} M\zeta_m \sum_{n=m+1}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} M\zeta_m \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma^{(m)}(x,y) g(y) dy .$$

Учитывая, что

$$\overline{\Psi}_1(x) = \frac{\int_0^{\infty} g(y)\overline{F}(x+y)dy}{\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma(x,y) g(y) dy}, \quad \overline{\Psi}_m(x) = \frac{\int_0^{\infty} \overline{F}(x+t)dt \int_0^{\infty} \gamma^{(m-1)}(t,y) g(y) dy}{\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma^{(m)}(x,y) g(y) dy}, \quad m \geq 2,$$

где $\overline{\Psi}_m(x) = \int_x^{\infty} \psi_m(t)dt, \ m \geq 1$, найдем математические ожидания $M\zeta_m$:

$$M\zeta_1 = \frac{\int_0^{\infty} g(x)dx \int_x^{\infty} \overline{F}(t)dt}{\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma(x,y) g(y) dy}, \quad M\zeta_m = \frac{\int_0^{\infty} dx \int_x^{\infty} \overline{F}(t)dt \int_0^{\infty} \gamma^{(m-1)}(x,y) g(y) dy}{\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \gamma^{(m)}(x,y) g(y) dy}, \quad m \geq 2.$$

Следовательно,

$$\overline{T}_2 = \int_0^{\infty} g(x)dx \int_x^{\infty} \overline{F}(t)dt + \sum_{m=2}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \int_x^{\infty} \overline{F}(t)dt \int_0^{\infty} \gamma^{(m-1)}(x,y) g(y) dy =$$

$$= \int_0^{\infty} g(x)dx \int_x^{\infty} \overline{F}(t)dt + \int_0^{\infty} dx \int_x^{\infty} \overline{F}(t)dt \int_0^{\infty} h_{\gamma}(x,y) g(y) dy .$$

Окончательно получаем выражение для определения среднего суммарного времени пребывания двух заявок в системе за цикл регенерации

$$\overline{T}_2 = \int_0^{\infty} (I + H_{\gamma}) g(x)dx \int_x^{\infty} \overline{F}(t)dt . \tag{10}$$

Среднее суммарное время пребывания одной заявки в системе за цикл регенерации. Пусть T_1 — суммарное время пребывания одной заявки в системе (заявка обслуживается, место в очереди свободно) за цикл регенерации. Рассмотрим последовательность СВ

$\{\eta_m,\ m \ge 1\}$. СВ η_m равна величине первого перескока суммы СВ $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$ последовательностью СВ β_n из рекуррентного входящего потока заявок при условии, что при обслуживании *m*-й заявки в цикле регенерации место в очереди занято. Графические иллюстрации реализации случайных величин η_1 и η_2 представлены на рис. 5.

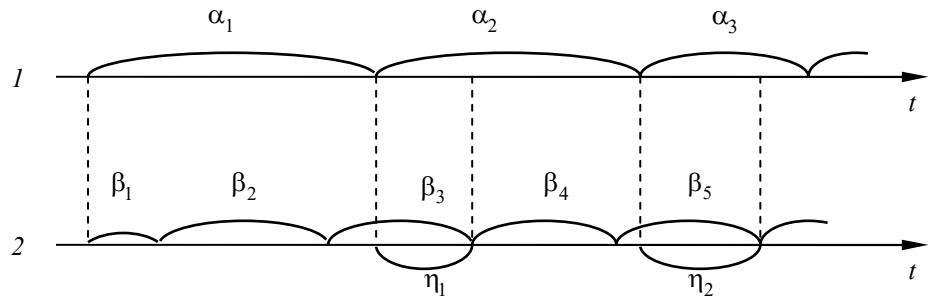

Рис. 5

Плотность распределения вероятностей $\varphi_m(x)$ СВ η_m определяется формулой

$$\varphi_m(x) = \left[\int_0^\infty \gamma^{(m)}(x,y)g(y)dy\right]\left[\int_0^\infty dx\int_0^\infty \gamma^{(m)}(x,y)g(y)dy\right]^{-1}.$$

Если $N_{\text{обс}} = 1$, то $T_1 = \alpha_1,\ \alpha_1 < \beta_1$. В случае $N_{\text{обс}} = 2$ имеем $T_1 = \beta_1 + \alpha_2$, $\beta_1 < \alpha_1,\ \alpha_2 < \eta_1$. Если $N_{\text{обс}} = n,\ n \ge 3$, то $T_1 = \beta_1 + \sum_{m=1}^{n-2}\eta_m + \alpha_n,\ \beta_1 < \alpha_1,\ \alpha_n < \eta_{n-1}$. Суммарное время пребывания одной заявки в системе за цикл регенерации для случая $N_{\text{обс}} = 3$ проиллюстрировано на рис. 6.

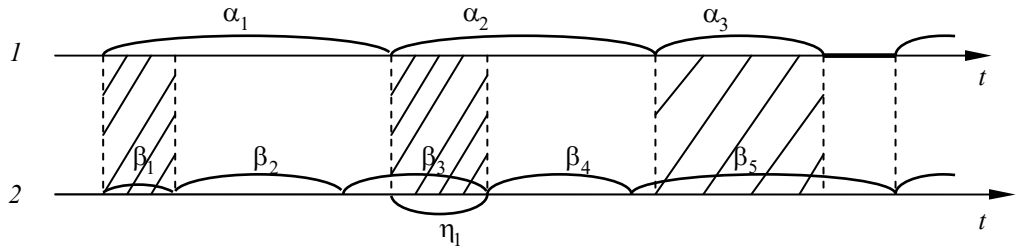

Рис. 6

Среднее значение T_1 найдем по формуле полного математического ожидания:

$$M(T_1) \equiv \overline{T}_1 = P(N_{\text{обс}} = 1)M(\alpha/\alpha < \beta) + P(N_{\text{обс}} = 2)\left[M(\beta/\beta < \alpha) + M(\alpha/\alpha < \eta_1)\right] +$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n)\left[M(\beta/\beta < \alpha) + \sum_{m=1}^{n-2} M(\eta_m/\eta_m < \alpha) + M(\alpha/\alpha < \eta_{n-1})\right] =$$

$$= P(N_{\text{обс}} = 1)M(\alpha/\alpha < \beta) + M(\beta/\beta < \alpha)\sum_{n=2}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n) +$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n)M(\alpha/\alpha < \eta_{n-1}) + \sum_{n=3}^{\infty} P(N_{\text{обс}} = n)\sum_{m=1}^{n-2} M(\eta_m/\eta_m < \alpha).$$

Далее учтем соотношения

$$P(N_{\text{обс}} = 1) = \int_0^\infty g(y)F(y)dy,\ M(\alpha/\alpha < \beta) = \left[\int_0^\infty xf(x)\overline{G}(x)dx\right]\left[\int_0^\infty g(x)F(x)dx\right]^{-1};$$

$$M(\beta/\beta<\alpha)=\frac{\int_0^\infty xg(x)\overline{F}(x)dx}{1-\int_0^\infty g(x)F(x)dx},\ \sum_{n=2}^\infty P(N_{\text{обс}}=n)=1-P(N_{\text{обс}}=1)=1-\int_0^\infty g(x)F(x)dx;$$

$$P(N_{\text{обс}}=n)M(\alpha/\alpha<\eta_{n-1})=P(N_{\text{обс}}=n)\frac{\int_0^\infty xf(x)dx\int_x^\infty \varphi_{n-1}(t)dt}{\int_0^\infty f(x)dx\int_x^\infty \varphi_{n-1}(t)dt}=$$

$$=P(N_{\text{обс}}=n)\frac{\int_0^\infty xf(x)dx\int_x^\infty dt\int_0^\infty \gamma^{(n-1)}(t,y)g(y)dy}{\int_0^\infty F(t)dt\int_0^\infty \gamma^{(n-1)}(t,y)g(y)dy}=\int_0^\infty xf(x)dx\int_x^\infty dt\int_0^\infty \gamma^{(n-1)}(t,y)g(y)dy;$$

$$\sum_{n=3}^\infty P(N_{\text{обс}}=n)\sum_{m=1}^{n-2}M(\eta_m/\eta_m<\alpha)=\sum_{m=1}^\infty M(\eta_m/\eta_m<\alpha)\sum_{n=m+2}^\infty P(N_{\text{обс}}=n)=$$

$$=\sum_{m=1}^\infty M(\eta_m/\eta_m<\alpha)\int_0^\infty dt\int_0^\infty \gamma^{(m+1)}(t,y)g(y)dy=$$

$$=\sum_{m=1}^\infty\frac{\int_0^\infty x\overline{F}(x)\varphi_m(x)dx}{\int_0^\infty \overline{F}(x)\varphi_m(x)dx}\int_0^\infty \overline{F}(t)dt\int_0^\infty \gamma^{(m)}(t,y)g(y)dy=\sum_{m=1}^\infty\int_0^\infty x\overline{F}(x)dx\int_0^\infty \gamma^{(m)}(x,y)g(y)dy.$$

Следовательно,

$$\overline{T}_1=\int_0^\infty xf(x)\overline{G}(x)dx+\int_0^\infty xg(x)\overline{F}(x)dx+\sum_{n=2}^\infty\int_0^\infty xf(x)dx\int_x^\infty dt\int_0^\infty \gamma^{(n-1)}(t,y)g(y)dy+$$

$$+\sum_{m=1}^\infty\int_0^\infty x\overline{F}(x)dx\int_0^\infty \gamma^{(m)}(x,y)g(y)dy=\int_0^\infty \overline{F}(x)\overline{G}(x)dx+\int_0^\infty xf(x)dx\int_x^\infty dt\int_0^\infty h_\gamma(t,y)g(y)dy+$$

$$+\int_0^\infty x\overline{F}(x)dx\int_0^\infty h_\gamma(x,y)g(y)dy=\int_0^\infty \overline{F}(x)\overline{G}(x)dx+\int_0^\infty \overline{F}(x)dx\int_x^\infty dt\int_0^\infty h_\gamma(t,y)g(y)dy=$$

$$=\int_0^\infty g(x)dx\int_0^x \overline{F}(t)dt+\int_0^\infty dx\int_0^\infty h_\gamma(x,y)g(y)dy\int_0^x \overline{F}(t)dt=\int_0^\infty (I+H_\gamma)g(x)dx\int_0^x \overline{F}(t)dt.$$

Таким образом,

$$\overline{T}_1=\int_0^\infty (I+H_\gamma)g(x)dx\int_0^x \overline{F}(t)dt. \tag{11}$$

Теперь можем определить среднее время занятости прибора за цикл регенерации

$$\overline{T}_1+\overline{T}_2=M\alpha\int_0^\infty (I+H_\gamma)g(x)dx=M\alpha\,\overline{N}_{\text{обс}}. \tag{12}$$

Среднее время пребывания системы в свободном состоянии за цикл регенерации. Пусть T_0 — время пребывания системы в свободном состоянии за цикл регенерации. Геометрическая иллюстрация этого времени представлена на рис. 7. Плотность распределения вероятностей этой СВ

$$l(x) = \int_0^\infty f(s)g(s+x)ds + \int_0^\infty g(y)dy \int_0^\infty h_\gamma(s+x,y)f(s)ds,$$

или в операторной форме $l(x) = A_f(I + H_\gamma)g(x)$, где $A_f\varphi(x) = \int_x^\infty f(y-x)\varphi(y)dy$.

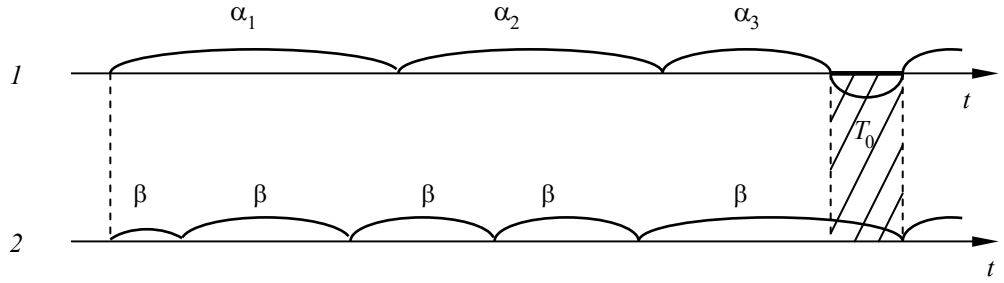

Рис. 7

Найдем выражение для функции $\overline{L}(x) = 1 - L(x)$, где $L(x)$ — функция распределения СВ T_0:

$$\overline{L}(x) = \int_x^\infty A_f(I + H_\gamma)g(t)dt = \int_0^\infty f(s)\overline{G}(s+x)ds + \int_0^\infty g(y)dy \int_0^\infty f(s)ds \int_{s+x}^\infty h_\gamma(z,y)dz =$$

$$= \int_0^\infty f(s)\overline{G}(s+x)ds + \int_0^\infty g(y)dy \int_x^\infty h_\gamma(z,y)F(z-x)dz = \int_0^\infty f(s)\overline{G}(s+x)ds +$$

$$+ \int_0^\infty g(y)dy \int_0^\infty h_\gamma(x+t,y)F(t)dt.$$

Теперь вычислим математическое ожидание СВ T_0:

$$M(T_0) \equiv \overline{T}_0 = \int_0^\infty g(x)dx \int_0^x F(t)dt + \int_0^\infty F(t)dt \int_t^\infty ds \int_0^\infty h_\gamma(s,y)g(y)dy =$$

$$= \int_0^\infty g(x)dx \int_0^x F(t)dt + \int_0^\infty dx \int_0^\infty h_\gamma(x,y)g(y)dy \int_0^x F(t)dt.$$

Таким образом,

$$\overline{T}_0 = \int_0^\infty (I + H_\gamma)g(x)dx \int_0^x F(t)dt. \qquad (13)$$

Среднее время пребывания системы в свободном состоянии можно выразить через среднее число поступивших и обслуженных заявок за цикл регенерации:

$$\overline{T}_0 = \int_0^\infty (I + H_\gamma)g(x)dx \int_0^x F(t)dt = \int_0^\infty (I + H_\gamma)g(x)xdx - \int_0^\infty (I + H_\gamma)g(x)dx \int_0^x \overline{F}(t)dt =$$

$$= M\beta + \int_0^\infty (H_\gamma g(x))xdx - \overline{T}_1 = M\beta + \int_0^\infty g(y)dy \int_0^\infty xh_\gamma(x,y)dx - \overline{T}_1. \qquad (14)$$

Далее преобразуем интеграл $\int_0^\infty xh_\gamma(x,y)dx$. Для этого умножим обе части тождества (3) на x и почленно проинтегрируем его по этой переменной в пределах от 0 до ∞. Принимая во внимание, что $M\beta_t = M\beta(1+H_g(t))-t$ [22], имеем

$$\int_0^\infty x\gamma(x,y)\,dx = M\beta\,\overline{F}(y) + M\beta\int_0^\infty H_g(t)f(t+y)\,dt - \int_y^\infty \overline{F}(t)\,dt,$$

$$\int_0^\infty x\,h_\gamma(x,y)\,dx = M\beta\,\overline{F}(y) + M\beta\int_0^\infty H_g(t)f(t+y)\,dt - \int_y^\infty \overline{F}(t)\,dt +$$

$$+M\beta\left[\int_0^\infty \overline{F}(s)h_\gamma(s,y)\,ds + \int_0^\infty h_\gamma(s,y)\,ds\int_0^\infty H_g(t)f(t+s)\,dt\right] - \int_0^\infty h_\gamma(s,y)\,ds\int_s^\infty \overline{F}(t)\,dt.$$

Тогда

$$\int_0^\infty g(y)dy\int_0^\infty xh_\gamma(x,y)dx = M\beta\int_0^\infty (I+H_g)\overline{A}_f(I+H_\gamma)g(x)dx - \int_0^\infty (I+H_\gamma)g(x)dx\int_x^\infty \overline{F}(t)dt =$$

$$= M\beta\left[\overline{N}-1\right] - \overline{T}_2.$$

Возвращаясь к (14), получаем

$$\overline{T}_0 = M\beta\overline{N} - \overline{T}_1 - \overline{T}_2 = M\beta\,\overline{N} - M\alpha\,\overline{N}_{\text{обс}}. \qquad (15)$$

Средняя длительность цикла регенерации. Определив средние суммарные времена пребывания системы в возможных физических состояниях системы за цикл регенерации, найдем среднюю длительность цикла $\overline{T}$:

$$\overline{T} = \overline{T}_2 + \overline{T}_1 + \overline{T}_0 = \int_0^\infty (I+H_\gamma)g(x)dx\int_x^\infty \overline{F}(t)dt + \int_0^\infty (I+H_\gamma)g(x)dx\int_0^x \overline{F}(t)dt +$$

$$+M\beta\,\overline{N} - M\alpha\,\overline{N}_{\text{обс}} = M\alpha\int_0^\infty (I+H_\gamma)g(x)dx + M\beta\,\overline{N} - M\alpha\,\overline{N}_{\text{обс}} = M\beta\,\overline{N}.$$

Таким образом, средняя длительность цикла регенерации равна произведению средней длительности интервала между поступлениями заявок в систему на среднее число поступающих заявок за цикл:

$$\overline{T} = M\beta\,\overline{N}. \qquad (16)$$

Финальные вероятности состояний системы. В [20] получены следующие формулы для вычисления финальных вероятностей p_i пребывания системы в физических состояниях $i = 0,1,2$ и финальной вероятности $p_1 + p_2$ того, что прибор занят обслуживанием:

$$p_0 = \frac{\int_0^\infty (I+H_\gamma)g(x)dx\int_0^x F(t)dt}{M\alpha\int_0^\infty (I+H_\gamma)g(x)dx + \int_0^\infty (I+H_\gamma)g(x)dx\int_0^x F(t)dt};$$

$$p_1 = \frac{\int_0^\infty (I+H_\gamma)g(x)dx\int_0^x \overline{F}(t)dt}{M\alpha\int_0^\infty (I+H_\gamma)g(x)dx + \int_0^\infty (I+H_\gamma)g(x)dx\int_0^x F(t)dt};$$

$$p_2 = \frac{\int_0^\infty (I + H_\gamma) g(x) dx \int_x^\infty \overline{F}(t) dt}{M\alpha \int_0^\infty (I + H_\gamma) g(x) dx + \int_0^\infty (I + H_\gamma) g(x) dx \int_0^x F(t) dt},$$

$$p_1 + p_2 = \frac{M\alpha \int_0^\infty (I + H_\gamma) g(x) dx}{M\alpha \int_0^\infty (I + H_\gamma) g(x) dx + \int_0^\infty (I + H_\gamma) g(x) dx \int_0^x F(t) dt}.$$

В терминах регенерирующего процесса эти утверждения имеют следующую формулировку: финальные вероятности физических состояний системы равны отношению средних суммарных времен пребывания системы в соответствующих физических состояниях за цикл регенерации к средней его продолжительности:

$$p_0 = \frac{\overline{T}_0}{\overline{T}},\ p_1 = \frac{\overline{T}_1}{\overline{T}},\ p_2 = \frac{\overline{T}_2}{\overline{T}},\ p_1 + p_2 = \frac{M\alpha \overline{N}_{\text{обс}}}{\overline{T}}. \tag{17}$$

Средние стационарные времена пребывания системы в подмножествах состояний. Обозначим через $T(E_i)$ средние стационарные времена пребывания системы в физических состояниях $i = 0,1,2$. В [20] установлены следующие формулы:

$$T(E_0) = \int_0^\infty (I + H_\gamma) g(x) dx \int_0^x F(t) dt;$$

$$T(E_1) = \left[\int_0^\infty (I + H_\gamma) g(x) dx \int_0^x \overline{F}(t) dt\right] \left[\int_0^\infty (I + H_\gamma) g(x) dx\right]^{-1};$$

$$T(E_2) = \left[\int_0^\infty (I + H_\gamma) g(x) dx \int_x^\infty \overline{F}(t) dt\right] \left[\int_0^\infty H_\gamma g(x) dx\right]^{-1},$$

$$T(E_1 \cup E_2) = M\alpha \int_0^\infty (I + H_\gamma) g(x) dx.$$

Полученные выражения для стационарных времен пребывания системы в состояниях имеют следующую интерпретацию в терминах характеристик регенерирующего процесса:

$$T(E_0) = \overline{T}_0 \equiv M\beta \overline{N} - M\alpha \overline{N}_{\text{обс}},\ T(E_1) = \frac{\overline{T}_1}{\overline{N}_{\text{обс}}},$$

$$T(E_2) = \frac{\overline{T}_2}{\overline{N}_{\text{обс}} - 1},\ T(E_1 \cup E_2) = M\alpha \overline{N}_{\text{обс}}. \tag{18}$$

Зная финальные вероятности и средние стационарные времена пребывания системы в состояниях 1 и 2, можно найти в установившемся режиме относительную пропускную способность системы $1 - p_2$, среднее время $\bar{t}_o$ пребывания заявки в очереди и среднее время $\bar{t}_s$ пребывания заявки в системе:

$$1 - p_2 = 1 - \overline{T}_2 \left[\overline{T}\right]^{-1};\ \bar{t}_o = p_1 \overline{T}_2 \left[\overline{N}_{\text{обс}} - 1\right]^{-1};\ \bar{t}_s = (p_0 + p_1) M\alpha + p_1 \overline{T}_2 \left[\overline{N}_{\text{обс}} - 1\right]^{-1}. \tag{19}$$

Частные случаи СМО. Выпишем стационарные характеристики частных случаев СМО $GI/G/1/1$, которые являются следствиями полученных формул.

Система $M/M/1/1$. Интенсивность входящего пуассоновского потока заявок равна b, а время обслуживания заявок имеет показательное распределение с параметром a. Тогда $\gamma(x,y) = be^{-bx-ay}$, $h_\gamma(x,y) = b\,a^{-1}(a+b)e^{-bx-ay}$. Преобразования интегральных выражений в формулах (2) и (8)—(19) приводят к известным соотношениям:

$$p_0 = (1-\rho)(1-\rho^3)^{-1},\ p_1 = \rho\,p_0,\ p_2 = \rho^2 p_0;$$

$$\overline{N}_{\text{обс}} = 1+\rho,\ \overline{N}_{\text{п}} = \rho^2,\ \overline{N} = 1+\rho+\rho^2;$$

$$\overline{T}_0 = b^{-1},\ \overline{T}_1 = b^{-1}\rho,\ \overline{T}_2 = b^{-1}\rho^2,\ \overline{T} = b^{-1}(1+\rho+\rho^2);$$

$$T(E_0) = b^{-1},\ T(E_1) = (a+b)^{-1},\ T(E_2) = a^{-1},\ T(E_1 \cup E_2) = a^{-1}(1+\rho);$$

$$\bar{t}_o = \frac{\rho^2}{b}\frac{1-\rho}{1-\rho^3};\ \bar{t}_s = \frac{\rho+2\rho^2}{b}\frac{1-\rho}{1-\rho^3},\ \rho = \frac{b}{a}.$$

Система $M/G/1/1$. Пусть интенсивность простейшего входящего равна b, т.е. $g(x) = be^{-bx}$, тогда $\gamma(x,y) = be^{-bx}\overline{F}(y)$, $h_\gamma(x,y) = b(1-d)^{-1}\overline{F}(y)\,e^{-bx}$, где $d = P\{\alpha > \beta\} = b\int_0^\infty \overline{F}(x)e^{-bx}dx < 1$. Преобразования выражений в (2) и (8)—(15) приводят к следующим расчетным формулам:

$$\overline{T}_0 = b^{-1}, \overline{T}_1 = d\left[b(1-d)\right]^{-1},\ \overline{T}_2 = \left[bM\alpha - d\right]\left[b(1-d)\right]^{-1}, \overline{T} = b^{-1} + (1-d)^{-1}M\alpha;$$

$$\overline{N} = 1 + b(1-d)^{-1}M\alpha,\ \overline{N}_{\text{обс}} = (1-d)^{-1},\ \overline{N}_{\text{п}} = (bM\alpha - d)(1-d)^{-1}.$$

Выражения (17)—(19)для определения стационарных характеристик системы принимают вид

$$p_0 = \frac{1-d}{1-d+bM\alpha},\ p_1 = \frac{d}{1-d+bM\alpha},\ p_2 = \frac{bM\alpha - d}{1-d+bM\alpha},\ p_1 + p_2 = \frac{bM\alpha}{1-d+bM\alpha};$$

$$T(E_0) = b^{-1},\ T(E_1) = b^{-1}d,\ T(E_2) = d^{-1}M\alpha - b^{-1},\ T(E_1 \cup E_2) = (1-d)^{-1}M\alpha;$$

$$\bar{t}_o = \left[bM\alpha - d\right]\left[b(1-d+bM\alpha)\right]^{-1},\ \bar{t}_s = \left[2bM\alpha - d\right]\left[b(1-d+bM\alpha)\right]^{-1}.$$

Система $GI/M/1/1$. Пусть время обслуживания заявок распределено экспоненциально с параметром a, т.е. $f(x) = ae^{-ax}$. Тогда $\gamma(x,y) = P(x)\cdot Q(y)$, где

$$P(x) = e^{ax}\int_x^\infty g(s)\,e^{-as}ds,\ Q(y) = \frac{a\,e^{-ay}}{1-\tilde{g}(a)}.$$

Здесь символом $\tilde{g}(a)$ обозначено преобразование Лапласа плотности $g(x)$: $\tilde{g}(a) = \int_0^\infty g(x)e^{-ax}dx$. Ядро интегрального оператора H_γ определяется как

$$h_\gamma(x,y) = \frac{1}{1-q}P(x)Q(y),\ q = \int_0^\infty Q(\tau)P(\tau)d\tau = \frac{-a\tilde{g}'(a)}{1-\tilde{g}(a)}.$$

Преобразования выражений в (2) и (8)—(19) приводят к следующим утверждениям:

$$\overline{N} = 1 + \frac{1}{1-q}\frac{\tilde{g}(a)}{1-\tilde{g}(a)},\ \overline{N}_{\text{обс}} = 1 + \frac{\tilde{g}(a)}{1-q},\ \overline{N}_{\text{п}} = \frac{1}{1-q}\frac{\left(\tilde{g}(a)\right)^2}{1-\tilde{g}(a)};$$

$$\overline{T}_0 = M\beta\left(1+\frac{1}{1-q}\frac{\tilde{g}(a)}{1-\tilde{g}(a)}\right)-\frac{1}{a}\left(1+\frac{\tilde{g}(a)}{1-q}\right),\ \overline{T}_1=\frac{1}{a},\ \overline{T}_2=\frac{1}{a}\frac{\tilde{g}(a)}{1-\tilde{g}(a)},\ \overline{T}=M\beta+\frac{M\beta}{1-q}\frac{\tilde{g}(a)}{1-\tilde{g}(a)};$$

$$p_0=1-\frac{\big(1-q+\tilde{g}(a)\big)\big(1-\tilde{g}(a)\big)}{a\,M\beta\big(1-q+q\,\tilde{g}(a)\big)},\ p_1=\frac{\big(1-q\big)\big(1-\tilde{g}(a)\big)}{a\,M\beta\big(1-q+q\,\tilde{g}(a)\big)},\ p_2=\frac{\tilde{g}(a)\big(1-\tilde{g}(a)\big)}{a\,M\beta\big(1-q+q\,\tilde{g}(a)\big)};$$

$$T(E_0)=M\beta\frac{1-q+q\,\tilde{g}(a)}{\big(1-q\big)\big(1-\tilde{g}(a)\big)}-\frac{1-q+\tilde{g}(a)}{a\big(1-q\big)},\ T(E_2)=\frac{1}{a},\ T(E_1)=\frac{1-q}{a\big(1-q+\tilde{g}(a)\big)};$$

$$\bar{t}_o=\frac{\big(1-q\big)\big(1-\tilde{g}(a)\big)}{a^2\,M\beta\big(1-q+q\,\tilde{g}(a)\big)},\ \bar{t}_s=\frac{1}{a}-\frac{\big(1-q-\tilde{g}(a)\big)\big(1-\tilde{g}(a)\big)}{a^2\,M\beta\big(1-q+q\,\tilde{g}(a)\big)}.$$

Численный пример. В таблице приведены численные результаты расчета характеристик однолинейной системы обслуживания с одним местом для ожидания для различных законов входных параметров системы при условии, что средние времена между заявками во входящем потоке и средние времена обслуживания одинаковые для всех законов и равны $M\beta = 0,067$ ч, $M\alpha = 0,200$ ч соответственно. Символом E_2 обозначен закон Эрланга второго порядка.

Предельная характеристика	Код системы			
	$E_2/E_2/1/1$	$E_2/M/1/1$	$M/E_2/1/1$	$M/M/1/1$
$\overline{N}_{\text{обс}}$	6,724	4,519	6,250	4,000
$\overline{N}_{\text{п}}$	13,924	9,744	13,500	9,000
$\overline{N}$	20,648	14,263	19,750	13,000
$\overline{T}$, ч	1,377	0,951	1,317	0,867
$\overline{T}_1$, ч	0,323	0,200	0,350	0,200
$\overline{T}_2$, ч	1,022	0,704	0,900	0,600
$\overline{T}_0$, ч	0,032	0,047	0,067	0,067
p_0	0,023	0,050	0,051	0,077
p_1	0,235	0,210	0,266	0,231
p_2	0,742	0,740	0,684	0,692
p_1+p_2	0,977	0,950	0,949	0,923
$1-p_2$	0,258	0,260	0,316	0,308
$T(E_0)$, ч	0,032	0,047	0,067	0,067
$T(E_1)$, ч	0,048	0,044	0,056	0,050
$T(E_2)$, ч	0,178	0,200	0,171	0,200
$\bar{t}_o$, ч	0,042	0,042	0,046	0,046
$\bar{t}_s$, ч	0,093	0,094	0,109	0,108

Заключение. Полумарковский процесс, описывающий функционирование системы обслуживания $GI/G/1/1$, рассмотрен как регенерирующий, точками регенерации которого являются моменты попадания заявок в свободную систему. Установлены формулы для вычисления среднего числа поступающих, обслуженных и потерянных заявок, а также средние суммарные времена пребывания в системе одной и двух заявок за цикл регенерации. Финальные вероятности физических состояний системы и средние стационарные времена пребывания в этих состояниях, в очереди и в системе выражены в терминах характеристик регенерирующего процесса. Как следствие полученных утверждений, выведены формулы для вычисления стационарных характеристик однолинейной системы обслуживания с одним местом для ожидания в случае частных законов распределения входных параметров системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987. 336 с.
2. *Бочаров П. П., Печинкин А. В.* Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995. 529 с.
3. *Климов Г. П.* Стохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1966. 244 с.
4. *Коваленко И. Н.* Теория массового обслуживания // Итоги науки. Сер. Теор. вероятн. 1963. М., 1965. С. 73—122.
5. *Коваленко И. Н.* Теория массового обслуживания // Итоги науки. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет. 1970. М., 1971. С. 5—109.
6. *Коваленко И. Н.* Обзор моих научных работ. Учителя и соратники // Кибернетика и системный анализ. 2010. № 3. С. 3—27.
7. *Печинкин А. В.* Стационарные вероятности состояний в системе GI/G/1/N с неординарным входящим потоком требований // Вестник РУДН. 1995. № 1. С. 77—86.
8. *Печинкин А. В., Чаплыгин В. В.*Стационарные характеристики системы массового обслуживания SM / MSP / n / r // Автоматика и телемеханика. 2004. № 9. С. 85—100.
9. *Дудин А. Н., Вишневский В. М., Синюгина Ю. В.* Анализ очереди $BMAP$ / G / 1 с закрытым сервисом и адаптивной продолжительностью отпусков // Телекоммуникационные системы. 2016. Т. 61, № 3. С. 403—415. DOI: 10.1007/s11235-014-9946-8.
10. *Бутко Т. К.* Процесс марковского восстановления системы $G/M/1/\infty$ // Применение аналитических методов в теории вероятностей: Сб. науч. тр. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. С. 17—27.
11. *Тарасов В. Н.* Исследование систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями // Проблемы передачи информации. 2016. № 1. С. 16—26.
12. *Atkinson J. B., Kovalenko I. N.* Some light-traffic and heavy- traffic results for the GI/G/n/0 queue using the GM Heuristic // Кибернетика и системный анализ. 2010. № 3. С. 92—100.
13. *Chen Y., Whitt W.* Set-valued Performance Approximations for the GI/G/K Queue Given Partial Information // Probability in the Engineering and Informational Sciences. 2020. P. 1—23. DOI:10.1017/S0269964820000509.
14. *Chen Y., Whitt W.* Extremal models for the GI/GI/K waiting-time tail-probability decay rate// Operations Research Letters. 2020. Vol. 48. P. 770—776. DOI: 10.1019/j.orl.2020.09.004.
15. *Chen Y., Whitt W.* Algorithms for the upper bound mean waiting time in the GI/GI/1 queue // Queueing Systems. 2020. Vol. 94. P. 327—356. DOI: 10.1007/s11134-020-09649-9.
16. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. Киев: Наук. думка, 1982. 236 с.
17. *Королюк В. С.* Стохастические модели систем. Киев: Наук. думка, 1989. 208 с.
18. *Корлат А. Н., Кузнецов В. Н., Новиков М. И., Турбин А. Ф.* Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. Кишинев: Штиинца, 1991. 276 с.
19. *Конп В. Я., Обжерин Ю. Е., Песчанский А. И.* Моделирование автоматизированных линий. Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2006. 240 с.
20. *Обжерин Ю. Е., Песчанский А. И.* Стационарные характеристики однолинейной системы обслуживания с одним местом для ожидания // Кибернетика и системный анализ. 2006. № 5. С. 51—62.
21. *Kendall D.* Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain // Ann. Math. Statistics. 1953. Vol. 24, N 3. P. 338—354.
22. *Beichelt F., Franken P.* Zuverlässigkeit und Instanphaltung, Mathematische Methoden. Berlin: VEB Verlag Technik, 1983. 392 p.
23. *Чжун Кай-Лай.* Однородные цепи Маркова. М.: Мир, 1964. 425 с.

Сведения об авторе

Алексей Иванович Песчанский — д-р техн. наук, профессор; Севастопольский государственный университет, кафедра высшей математики; E-mail: peschansky_sntu@mail.ru

Поступила в редакцию 09.11.2022; одобрена после рецензирования 26.11.2022; принята к публикации 20.03.2023.

REFERENCES

1. Gnedenko B.V., Kovalenko I.N. *Vvedeniye v teoriyu massovogo obsluzhivaniya* (Introduction to Queuing Theory), Moscow, 1987, 336 p. (in Russ.)
2. Bocharov P.P., Pechinkin A.V. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* (Queuing Theory), Moscow, 1995, 529 p. (in Russ.)
3. Klimov G.P. *Stokhasticheskiye sistemy obsluzhivaniya* (Stochastic Queuing Systems), Moscow, 1966, 244 p. (in Russ.)
4. Kovalenko I.N. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya. Itogi nauki. Seriya Teoriya veroyatnostey* (Theory of Queuing. The Results of Science. Series Theory of Probability), 1963, Moscow, 1965, pp. 73–122. (in Russ.)
5. Kovalenko I.N. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya. Itogi nauki. Seriya Teoriya veroyatnostey. Matematicheskaya statistika Teoreticheskaya kibernetika* (Theory of Queuing. The Results of Science. Series Theory of Probability. Mathematical Statistics Theoretical Cybernetics), 1970, Moscow, 1971, pp. 5–109. (in Russ.)
6. Kovalenko I.N. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2010, no. 3, pp. 339–362.
7. Pechinkin A.V. *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics*, 1995, no. 1, pp. 77–86. (in Russ.)
8. Pechinkin A.V., Chaplygin V.V. *Automation and Remote Control*, 2004, no. 9(65), pp. 1429–1443, DOI: https://doi.org/10.1023/B:AURC.0000041421.62689.a8.
9. Dudin A.N., Vishnevsky V.M., Sinyugina Yu.V. *Telecommunication Systems*, 2016, no. 3(61), pp. 403–415, DOI: 10.1007/s11235-014-9946-8.
10. Butko T.K. *Primeneniye analiticheskikh metodov v teorii veroyatnostey* (Application of Analytical Methods in Probability Theory), Kyiv, 1983, pp. 17–27. (in Russ.)
11. Tarasov V.N. *Problems of Information Transmission*, 2016, no. 1, pp. 14–23.
12. Atkinson J.B., Kovalenko I.N. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2010, no. 3, pp. 426–435.
13. Chen Y., Whitt W. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2020, pp. 1–23, DOI: 10.1017/S0269964820000509.
14. Chen Y., Whitt W. *Operations Research Letters*, 2020, vol. 48, pp. 770–776, DOI: 10.1019/j.orl.2020.09.004.
15. Chen Y., Whitt W. *Queueing Systems*, 2020, vol. 94, pp. 327–356, DOI: 10.1007/s11134-020-09649-9.
16. Korolyuk V.S., Turbin A.F. *Protsessy markovskogo vosstanovleniya v zadachakh nadezhnosti system* (Markov Recovery Processes in Problems of System Reliability), Kyiv, 1982, 236 p. (in Russ.)
17. Korolyuk V.S. *Stokhasticheskiye modeli system* (Stochastic Models of Systems), Kyiv, 1989, 208 p. (in Russ.)
18. Korlat A.N., Kuznetsov V.N., Novikov M.I., Turbin A.F. *Polumarkovskiye modeli vosstanavlivayemykh sistem i sistem massovogo obsluzhivaniya* (Semi-Markovian Models of Recoverable Systems and Queuing Systems), Kishinev, 1991, 276 p. (in Russ.)
19. Kopp V.Ya., Obzherin Yu.E., Peschansky A.I. *Modelirovaniye avtomatizirovannykh liniy* (Modeling of Automated Lines), Sevastopol, 2006, 240 p. (in Russ.)
20. Obzherin Y.E., Peschanskii A.I. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2006, no. 5, pp. 656–666.
21. Kendall D. *Ann. Math. Statistics*, 1953, no. 3(24), pp. 338–354.
22. Beichelt F., Franken P. *Zuverlässigkeit und Instanphaltung, Mathematische Methoden*, Berlin, VEB Verlag Technik, 1983, 392 s.
23. Kai Lai Chung, *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*, Berlin, NY, Springer, 1967, vol. 104.

Data on author

Alexey I. Peschansky — Dr. Sci., Professor; Sevastopol State University, Department of Higher Mathematics; E-mail: peschansky_sntu@mail.ru

Received 09.11.2022; approved after reviewing 26.11.2022; accepted for publication 20.03.2023.